Beiträge zur Dualitätstheorie der Vektoroptimierung

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades

Dr. rer. nat.

eingereicht bei der Fakultät für
Mathematik und Naturwissenschaften
des Wissenschaftlichen Rates der
Technischen Hochschule Ilmenau

vorgelegt von Dipl.-Math. Emil Iwanow
geboren am 11.4.1954 in Sofia

eingereicht am 1.9.1983

***

Hiermit möchte ich Herrn Doz. Dr. R. Nehse für die aufmunternden und anregenden Diskussionen sowie für die wertvollen Hinweise bei der stilistischen Gestaltung der Arbeit ganz herzlich danken. Ich danke auch Herrn Prof. Dr. K.-H. Elster und allen Kollegen des Wissenschaftsbereiches "Optimierung" für die Unterstützung, die mir während meiner Tätigkeit zuteil wurde.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Vektoroptimierung (Polyoptimierung, mehrkriteriale Optimierung, Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung) gewinnt in den Anwendungen ständig an Bedeutung, da im Prinzip jede praktische Aufgabe der Entscheidungstheorie eine mehrkriteriale Aufgabe darstellt. Ein fundamentaler Begriff dieser Theorie ist der Begriff der PARETO-optimalen oder effizienten Lösung. Er ist eine Verallgemeinerung des Maximums einer numerischen Funktion auf den Fall mehrerer solcher Funktionen: die Lösung ist PARETO-optimal, wenn keines der Kriterien verbessert werden kann, ohne daß ein anderes schlechter wird. Dieser Begriff geht auf V. PARETO (1848 -1923) zurück, der ihn in ökonomischen Fragestellungen verwendet hat.

Es existiert bereits eine umfangreiche Literatur zur Vektoroptimierung (vgl. ACHILLES/ELSTER/NEHSE (1979), NEHSE (1982)), deren Anfänge in den fünfziger Jahren liegen, obwohl einzelne Ergebnisse, oft in anderer Formulierung, schon früher existierten (vgl. STADLER (1979)).

Die vorliegende Arbeit ist Fragen der Dualitätstheorie in der Vektoroptimierung gewidmet. Die Idee dualer Vektoroptimierungsprobleme wurde bereits 1951 von GALE, KUHN und TUCKER aufgeworfen, die auch grundlegende Resultate für den linearen Fall erhielten. In den letzten 10 Jahren sind eine ganze Reihe von Arbeiten erschienen, verbunden mit den Namen SCHÖNFELD, BRECKNER, ISERMANN, KORNBLUTH, RÖDDER, BITRAN, GROS, TANINO/SAWARAGI, NOGIN, NAKAYAMA, CORLEY, GERSTEWITZ u.a. , wobei die Autoren nicht immer die Bezüge zu vorhandenen Ergebnissen angaben. Ökonomische Deutungen für Dualproblemen wurden von BITRAN (1981) und RÖDDER (1980) gegeben, Anwendungen der Dualität in der Approximationstheorie findet man bei JAHN (1983).

Das Hauptanliegen der vorgelegten Schrift besteht in vergleichenden Untersuchungen und einer kritischen Analyse der genannten Arbeiten. Außerdem werden einige neue Resultate zum Problemkreis der Dualitätstheorie und deren Grundlagen bewiesen.

Im zweiten Kapitel wird nach einigen einführenden Definitionen und Bemerkungen eine Existenzaussage für eigentliche Maximalelemente (eigentlich effiziente Lösungen) bewiesen. Es wird dann eine allgemeinere Definition für eigentliche Maximalelemente bei nicht notwendig konvexen Problemen, die an frühere Definitionen von LAMPE (1980) und GERSTEWITZ (1983a) anknüpft, sowie eine äquivalente Beschreibung dieser eigentlichen Maximalelemente durch geeignete nichtlineare skalare Ersatzprobleme angegeben. Auch auf gewisse Fehler in den genannten Arbeiten wird eingegangen.

Im dritten Kapitel werden einige bekannte Dualprobleme für das lineare Vektormaximumproblem auf der Basis ihrer Zielmengen verglichen. Dazu werden im Abschnitt 3.2 einige Hilfsmittel bereitgestellt. Als Ausgang dient ein algebraischer Darstellungssatz. Daraus wird eine verallgemeinerte Version des bekannten FARKAS-Lemmas gewonnen, wodurch ein anderer Beweis für einen Dualitättssatz von ISERMANN (1978) angegeben werden kann. Der Vergleich der unterschiedlichen Dualproblemen zeigt, daß im wesentlichen nur andersartige Darstellungen ein und derselben dualen Zielmenge benutzt wurden. Schließlich wird ein Sattelpunktsatz von RÖDDER mit geänderter Beweisanordnung reproduziert und auf einen Fehler in RÖDDER (1977) hingewiesen.

Das vierte Kapitel beginnt mit der Wiedergabe der Theorie konjugierter Punkt-Menge-Abbildungen nach TANINO/SAWARAGI (1980), wobei von einer etwas allgemeineren Definition ausgegangen wurde und gewisse Voraussetzungen abgeschwächt werden konnten. Durch eine zum Dualitätsschema von JOLY/LAURENT analoge Konstruktion wird unter Verwendung dieser Konjugierten ein Dualproblem gewonnen, welches mit dem Dualproblem von BITRAN (1981) übereinstimmt. Unter Ausnutzung der Ergebnisse von SCHÖNFELD (1970), LAMPE (1981) und JAHN (1983) wird ein allgemeines Schema zur Gewinnung von Dualproblemen mittels Skalarisierung und FENCHEL-Konjugation entwickelt. Für das allgemeine Dualproblem, aus welchem durch Spezialisierung die Probleme von SCHÖNFELD und JAHN hervorgehen, werden starke Dualitätsaussagen bewiesen. Für das Dualproblem von BITRAN (1981) werden einige neue Resultate, darunter ein inverser Dualitätssatz, bewiesen. In Weiterführung der Untersuchungen von NEHSE (1981) und GERSTEWITZ (1982) werden WOLFE-duale Probleme betrachtet. Für eine modifizierte Variante dieser Probleme wird gleichfalls ein inverser Dualitätssatz angegeben. Außerdem wird eine Reihe von Fehlern in NAKAYAMA (1981) aufgedeckt; für einen Sattelpunktsatz, dessen Beweis dort unkorrekt ist, wird ein neuer kurzer Beweis vorgestellt. Für ein von GERSTEWITZ (1983b) stammendes Dualproblem werden - allerdings für eine etwas geänderte Fassung - wesentlich kürzere Beweise der Dualitätssätze angeführt. Auf eine fehlende Voraussetzung in GERSTEWITZ (1983b) wird hingewiesen. Unter Verwendung des verallgemeinerten FARKAS-Lemmas aus Abschnitt 3.2 des dritten Kapitels wird eine notwendige Optmalitätsbedingung für Vektoroptimierungsprobleme mit differenzierbaren Ziel- und Restriktionsfunktionen ohne vorherige Skalarisierung hergeleitet.

2 Vorbereitende Definitionen und Aussagen

2.1 Problemstellung der Vektoroptimierung

Im $\mathbb{R}^n$ sei eine Halbordnung, d.h. eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation '$\geq$', vermöge des konvexen Kegels K eingeführt, also $K \cap (-K) = \{0\}$ und $x \leq y$ genau dann, wenn $y - x \in K$.

Wir schreiben:

$x \prec y$, falls $x \leq y$ und $x \neq y$ gelten;

$x < y$, falls $y - x \in \operatorname{int} K$.

Folgende Teilmenge des Dualkegels K^* von K

$K^{\#} := \{y^* \in K^* \mid \quad {y^*}^T y > 0 \quad \forall t \in K - \{0\}\}$

wird oft das Quasiinnere von K^* genannt.

BEMERKUNG 2.1: Wenn nichts anderes vereinbart wurde, wollen wir immer $K = \mathbb{R}^k_+$ mit $\mathbb{R}^k_+ = \{x^* \in \mathbb{R}^k \mid \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., k\}$ voraussetzen.

DEFINITION 2.1: Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^k$. Die Elemente der Menge

$$\operatorname{Min} Y = \{p \in Y \mid (Y - p) \cap (-K) = \{0\}\}$$

heißen Minimalelemente (effiziente Punkte) von Y.

BEMERKUNG 2.2: Es werden ebenfalls Maximalelemente betrachtet, und zwar heißt x_0 Maximalelement von $Y \subseteq \mathbb{R}^k$, wenn -x_0 Minimalelement von -Y ist.

Die Menge der Maximalelemente einer Menge $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ bezeichnen wir entsprechend mit $\operatorname{Max} Y$.

Wir betrachten das Optimierungsproblem :

$$(P) \qquad f(x) \longrightarrow \operatorname{Min}, \quad x \in G$$

mit $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dieses ist in folgendem Sinn zu verstehen: Man bestimme die Menge aller Mimimalelemente von $P := f(G) + K$.

Nach ELSTER/NEHSE (1980) wollen wir das Problem

$$(D) \qquad d(y) \longrightarrow \operatorname{Max}, \quad y \in G^*$$

mit $d : G^* \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad G^* \subseteq E$, E ein Vektorraum, ein Dualproblem zu (P) nennen, wenn gilt

$$f(x) \not\prec d(y)$$

für alle $x \in G$ und alle $y \in G^*$. Wir sagen dann: für (P) und (D) gilt die schwache Dualitätsbeziehung.

2.2 Eigentliche Maximalelemente

In der Literatur findet man einen Reihe von im allgemeinen nicht äquivalenten Definitionen der eigentlichen Maximalelemente (vgl. z.B. ELSTER/NEHSE (1980), VOGEL (1977a)). Für unsere Zwecke eignet sich folgende

DEFINITION 2.2: Ein Punkt $y^0 \in Y \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt eigentliches Maximalelement von Y, wenn ein $z^0 \in K^\#$ existiert mit

$$z^{0T} y \leq z^{0T} y^0 \quad \forall y \in Y.$$

Die Menge der eigentlichen Maximalelemente vo Y bezeichnen wir mit $\operatorname{Max}_E Y$.

Die im folgenden definierte K-Kompaktheit einer Menge kann zumindest im Falle $K = \mathbb{R}^2_+$ anschaulich als 'Nordostkompaktheit' bezeichnet werden.

DEFINITION 2.3: Eine Menge $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt K-kompakt, wenn $Y \cap (y + K)$ kompakt ist für alle $y \in Y$.

Man hat folgende Existenzaussage (vgl. VOGEL (1977a)):

SATZ 2.1: Wenn $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ K-kompakt ist, so existiert zu jedem $y^1 \in Y$ ein $y^2 \in \operatorname{Max} Y$ mit $y^2 \geq y^1$.

Daraus folgt sofort

KOROLLAR 2.1: Ist $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ K-kompakt, so gilt $Y - K = \operatorname{Max} Y - K$.

Es gelten folgende Aussagen:

SATZ 2.2: Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^k$.

(i) $\operatorname{Max} Y = \operatorname{Max}(Y - K)$.

(ii) $\operatorname{Max}_E Y = \operatorname{Max}_E(Y - K)$.

(iii) Y ist K-kompakt $\Longleftrightarrow Y - K$ ist K-kompakt.

(iv) $\operatorname{Max}_E Y \subseteq \operatorname{Max} Y$.

SATZ 2.3: (FOCKE (1973)) Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ polyedrisch. Dann gilt

$$\operatorname{Max} Y = \operatorname{Max}_E Y.$$

Bei BORWEIN (1980) ist gezeigt:

Y ist kompakt und konvex $\Longrightarrow \operatorname{Max} Y \subseteq \overline{\operatorname{Max}_E Y}$;

bei PODINOVSKIJ/NOGIN (1982) :

Y ist abgeschlossen und konvex und $K = \mathbb{R}^k_+ \Longrightarrow \operatorname{Max} Y \subseteq \overline{\operatorname{Max}_E Y}$.

Bei BITRAN/MAGNANTI (1979) findet man die Aussage:

Y ist abgeschlossen und konvex $\Longrightarrow \operatorname{Max} Y \subseteq \overline{\operatorname{Max}_E Y}$,

wobei aber der Beweis einen Fehler enthält (vgl. BEMERKUNG 2.4).

Unter Verwendung einer anderen Beweisidee als in den oben genannten Arbeiten beweisen wir:

SATZ 2.4: Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen und konvex, $\mathbb{R}^k$ sie durch den konvexen abgeschlossenen Kegel K halbgeordnet. Dann gilt:

$$\operatorname{Max} Y \neq \emptyset \Longrightarrow \operatorname{Max}_E Y \neq \emptyset.$$

Beweis :

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \in \operatorname{Max} Y$. Für den Rezessionskegel

$$\Theta^+ Y := \{z \in \mathbb{R}^k \mid \quad y + tz \in Y \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in Y\}$$

von Y gilt dann

$$K \cap \Theta^+ Y = \{0\}.$$

Angenommen, es gilt

$$\operatorname{int} K^* \cap r.\operatorname{int} (-\Theta^+ Y)^* = \emptyset.$$

K^* und $(-\Theta^+ Y)^*$ sind abgeschlossene konvexe Kegel und K^* besitzt ein nichtleeres Inneres (vgl. BEMERKUNG 2.3). Somit gibt es ein $w \in \mathbb{R}^k$, $w \neq 0$ mit (vgl. z.B. SATZ 2.5)

$$w^T u \geq 0 \quad \forall u \in K^*$$

und

$$w^T v \geq 0 \quad \forall v \in (\Theta^+ Y)^*.$$

Hieraus folgt

$$w \in K^{**} \cap (\Theta^+ Y)^{**} = K \cap (\Theta^+ Y).$$

Wegen $w \neq 0$ ist dies ein Widerspruch.

Sei jetzt $z^0 \in \operatorname{int} K^* \cap r.\operatorname{int} (-\Theta^+ Y)^*$. Es gilt

$$\Theta^+ Y = (\Theta^+ Y \cap L^\perp) + L, \tag{2.2.1}$$

wobei L den maximalen in $\Theta^+ Y$ enthaltenen Unterraum bezeichnet. Aus

$$-z^0 \in r.\operatorname{int} (\Theta^+ Y)^* \quad \text{und} \quad 0 \in r.\operatorname{int} L$$

folgt wegen

$$r.\operatorname{int} [(\Theta^+ Y)^* + L] = r.\operatorname{int} (\Theta^+ Y \cap L^\perp)^*.$$

die Beziehung

$$-z^0 \in r.\operatorname{int} (\Theta^+ Y \cap L^\perp)^*.$$

Da $\Theta^+ Y \cap L^\perp$ keinen nichttrivialen Unterraum enthalten kann, ist das Innere von $(\Theta^+ Y \cap L^\perp)^*$ nichtleer und es gilt somit

$$-z^0 \in \operatorname{int} (\Theta^+ Y \cap L^\perp)^*.$$

Sei $z^{0T} y = 0$ für ein $y \in \Theta^+ Y$. Wir zeigen, daß dann $y \in L$ gilt. Wegen (2.2.1) gilt

$$y = y^1 + y^2 \quad \text{mit} \quad y^1 \in \Theta^+ Y \cap L^\perp \quad \text{und} \quad y^2 \in L.$$

Wegen $-z^0 \in (\Theta^+ Y)^* = (\Theta^+ Y \cap L^\perp)^* \cap L^\perp$ gilt $z^{0T} y^2 = 0$,

und wir erhalten

$$z^{0T} y^1 = 0,$$

was wegen $-z^0 \in \operatorname{int} (\Theta^+ Y \cap L^\perp)^*$, und $y^1 \in \Theta^+ Y \cap L^\perp$

$$y^1 = 0$$

zur Folge hat. Damit gilt $y = y^2$, d.h. $y \in L$.

Wir zeigen nun, daß ein $y^0 \in Y$ existiert mit

$$z^{0T} y \leq z^{0T} y^0 \quad \forall y \in Y.$$

Seien $\delta(.,Y) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ das Indikatorfunktional von Y, d.h.

$$\delta(x,Y) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in Y, \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

gemäß

$$h(x) = \delta(x,Y) - z^{0T} x$$

definiert.

Da h infolge der an Y gestellten Voraussetzungen eigentlich konvex und abgeschlossen ist, gilt für die Rezessionsfunktion $h\Theta^+ : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ von h (vgl. ROCKAFELLAR (1970), Satz 8.5):

$$h\Theta^+(y) = \begin{cases} -z^{0T} y & \text{, falls } y \in \Theta^+ Y, \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $-z^0 \in (\Theta^+ Y)^*$ gilt

$$h\Theta^+(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^k.$$

Sei $h\Theta^+(y) = 0$. Dann ist $z^{0T} y = 0$, was $y \in L$ und somit $h\Theta^+(-y) = 0$ wegen $-y \in \Theta^+ Y$ nach sich zieht. Damit gilt (ROCKAFELLAR (1970) Korollar 13.3.4)

$$z^0 \in r.\text{int dom}\, \delta^*(\cdot, Y),$$

es existiert also ein $y^0 \in Y$ mit (ROCKAFELLAR (1970) Satz 23.4 und Korollar 23.5.3)

$$z^{0T} y^0 = \delta^*(z^0, Y) \geq z^{0T} y \qquad \forall y \in Y.$$

Aus $\text{int}\, K^* \neq \emptyset$ folgt für den abgeschlossenen konvexen Kegel K die Beziehung $K^\# = \text{int}\, K^*$. Somit ist $y^0 \in \text{Max}_E Y \quad \square$.

BEMERKUNG 2.3: Die Forderung $\text{int}\, K^* \neq \emptyset$ ist äquivalent mit der Bedingung, daß K keinen nichttrivialen Unterraum enthält, d.h.,daß $K \cap (-K) = \{0\}$ ist, was eine Konsequenz der Antisymmetrie der Halbordnung ($x \leq y \quad \& \quad y \leq x \Longrightarrow x = y$) ist.

BEMERKUNG 2.4: Seien $B^k = \{x \in \mathbb{R}^k \,|\, x^T x \leq 1\}$ und S_j ein konvexer abgeschlossener Kegel mit $S_j \subseteq r.\text{int}\, K^* \cup \{0\}$. Seien weiter $x^0 \in \text{Max}\, P$ und $Z = P - x_0$.

In BITRAN/MAGNANTI (1979) Theorem 3.1 wird daraus die Existenz von $t_j \in T_j = S_j \cap B^k$ und $z_j \in Z$ mit $t_j \in K^\#$ und

$$z^T t_j \leq z_j^T t_j \leq z_j^T t \quad \forall z \in Z, \quad \forall t \in T_j \tag{2.2.2}$$

gefolgert.

Betrachten wir etwa $P = B^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K = \mathbb{R}^2_+$ und $x^0 = 0$. Aus (2.2.2) und $0 \in T_j$ folgt

$$z^T t_j \leq 0 \quad \forall z \in Z(= P),$$

d.h.

$$t_j \in P^0 = \{t \in \mathbb{R}^2 \,|\, t^T p \leq 0 \quad \forall p \in P\} = \{t \in \mathbb{R}^2 \,|\, t = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \geq 0\}.$$

Wegen $T_j \subseteq \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+ \cup \{0\}$ folgt $t_j = 0$ und somit $t_j \notin K^{\#}$.

Somit kann man aus (2.2.2) nicht $z_j \in \operatorname{Max}_E P$ folgern, wie im Beweis des obengenannten Theorems 3.1 behauptet wird.

KOROLLAR 2.2: Seien die Voraussetzungen des Satzes 2.4 erfüllt und es gelte $\operatorname{Max} Y \neq \emptyset$. Dann ist Y K-kompakt.

Beweis :

Nach Satz 2.4 existiert ein $z^0 \in \operatorname{int} K^*$ mit

$$z^{0T} y \leq z^{0T} y^0 \quad \forall y \in Y.$$

Angenommen, Y ist nicht K-kompakt. Dann gibt es ein $\bar{y} \in Y$ derart, daß $Y \cap (\bar{y} + K)$ nicht kompakt ist. Da $Y \cap (\bar{y} + K)$ abgeschlossen ist , existiert eine unbeschränkte Folge $\{z^j\} \subseteq K$ mit $\bar{y} + z^j \in Y$ für alle $j \in N$. Wegen $z^0 \in \operatorname{int} K^*$ ist dann aber die Folge $\{z^{0T} z^j\}$ nach oben nicht beschränkt im Widerspruch zu

$$z^{0T}(\bar{y} + z^j) \leq z^{0T} y^0 \quad \forall j \in N. \quad \square$$

In GERSTEWITZ (1983a) werden, neben einer Übersicht verschiedener Definitionen von eigentlichen Maximalelementen, weitere Begriffe vorgeschlagen. So wird DEFINITION 2.2 folgendermaßen verallgemeinert:

DEFINITION 2.4: Ein Punkt $y^0 \in Y \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt eigentliches Maximalelement von Y, wenn ein konkaves, stetiges, streng monotones Funktional $z_s : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$z_s(y^0) \geq z_s(y) \quad \forall y \in Y.$$

Weiter wird dort ein zweiter Begriff eingeführt, der die Definitionen von BORWEIN (1977) und VOGEL (1977) in gewisser Weise verallgemeinert:

DEFINITION 2.5: Ein Punkt $y^0 \in Y \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt eigentliches Maximalelement von Y, wenn eine offene konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^k$ existiert mit $K - \{0\} \subseteq C$ und $C \cap (Y - y^0) = \emptyset$.

Diese Definition stellt einen schwächere Forderung an die eigentlichen Maximalelemente als die Definition 3.4 in LAMPE (1980), wo die Existenz eines offenen konvexen Kegels mit den genannten Eigenschaften verlangt wird.

In GERSTEWITZ (1983a) werden die Beziehungen zwischen DEFINITION 2.4 und DEFINITION 2.5 untersucht. Die Behauptung, daß im Falle int $K \neq \emptyset$ beide Definitionen äquivalent seien, ist dort nicht korrekt bewiesen. Im Beweis der strengen Monotonie von z_s (GERSTEWITZ (1983a), Satz 2), wird folgendermaßen geschlossen:

Sei $z_s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ konkav und stetig, und es gelte für gewisse Mengen C und D aus X

$$z_s(t) > 0 \quad \forall t \in C,$$
$$z_s(t) \leq 0 \quad \forall t \in D,$$

und sei $a \in X$.

Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit

$$z_s(t) + r > 0 \quad \forall t \in C + a,$$
$$z_s(t) + r \leq 0 \quad \forall t \in D + a.$$

Für $z(t) := -t^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C = (-1, 1), \quad D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ und $a = 3$ existiert jedoch kein solches $r \in R$, denn es müßte sonst einerseits

$$-3^2 + 1 + r > 0$$

und andererseits

$$-2^2 + 1 + r \leq 0$$

gelten.

Wir gehen deshalb von folgender Definition aus:

<u>DEFINITION 2.6:</u> Ein Punkt $y^0 \in Y \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt eigentliches Maximalelement von Y, wenn es eine offene konvexe Menge $C \neq \emptyset$ gibt, so daß gilt:

$$\bar{C} + (\mathbb{R}^k - \{0\}) \subseteq C,$$
$$C \cap (Y - y^0) = \emptyset.$$

Es ist für die Dualitätstheorie oft von Vorteil, wenn die Menge $M(Y)$ der eigentlichen Maximalelmente von Y (gemäß DEFINITION 2.6) mit Hilfe von skalaren Problemen charakterisiert werden kann. Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze.

<u>HILFSSATZ 2.1:</u> (CROUZEIX (1977)) Für die Mengenfamilie $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ gelte

$$S_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} S_\mu,$$

und es sei $h(x) = \sup \{\lambda \,|\, x \in S_\lambda\}$. Dann gilt:

a) $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) \geq \lambda\}$;

b) Ist S_λ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ konvex, so ist h quasikonkav;

b) Ist S_λ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist h oberhalbstetig.

HILFSSATZ 2.2: (BERGE (1963)) Sei Φ eine unterhalbstetige Funktion auf $X \times Y$, und Γ sei eine unterhalbstetige Punkt-Menge-Abbildung von X in Y, so daß $\Gamma x \neq \emptyset$ für alle $x \in X$ gilt. Dann ist

$$S(x) = \sup \{\Phi(x, y) \,|\, y \in \Gamma x\}$$

eine unterhalbstetige Funktion.

Nun beweisen wir:

SATZ 2.5: Ein Punkt $y^0 \in Y$ ist eigentliches Maximalelement von Y im Sinne der DEFINITION 2.6 genau dann, wenn ein quasikonkaves, stetiges, streng monotones Funktional $z : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$z(y^0) \geq z(y) \quad \forall y \in Y.$$

Beweis :

(i) Notwendigkeit : Sei $y^0 \in M(Y)$. O.B.d.A. sei $y^0 = 0$, sonst betrachten wir anstelle von Y die Menge $\tilde{Y} = Y - y^0$. Sei $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Wir setzen für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$S_\lambda = \bar{C} + \lambda e.$$

Wir zeigen:

$$S_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} S_\mu.$$

Sei $x \in S_\lambda$ und $\mu < \lambda$. Dann ist $x = y + \lambda e$ für ein $y \in \bar{C}$. Wegen $y + (\lambda - \mu)e \in C$ gilt

$$x = y + (\lambda - \mu)e + \mu e \in S_\mu,$$

und somit

$$S_\lambda \subseteq \bigcap_{\mu < \lambda} S_\mu.$$

Sei

$$x \in \bigcap_{\mu < \lambda} S_\mu.$$

Dann gibt es für jedes μ mit $\mu < \lambda$ ein $y_\mu \in \bar{C}$ mit

$$x = y_\mu + \mu e.$$

Es gilt wegen $y_\mu \in \bar{C}$:

$$\lim_{\mu \to \lambda} y_\mu = \lim_{\mu \to \lambda} (x - \mu e) = x - \lambda e \in \bar{C}$$

und somit $x \in S_\lambda$. Mithin ist

$$\bigcap_{\mu < \lambda} S_\mu \subseteq S_\lambda.$$

Nach HILFSSATZ 2.1 ist

$$z(x) := \sup \{\lambda \,|\, x \in S_\lambda\}$$

eine quasikonkave oberhalbstetige Funktion.

Um die Stetigkeit von z zu zeigen, genügt es unter Berücksichtigung von HILFSATZ 2.2, die Unterhalbstetigkeit der Punkt-Menge-Abbildung $\Gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\Gamma x = \{\lambda \,|\, x \in S_\lambda\}$ und $\Gamma x \neq \emptyset$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nachzuweisen.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Unterhalbstetigkeit von Γ (vgl. BERGE (1963)) besteht darin, daß $\Gamma^- G = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \Gamma x \cap G \neq \emptyset\}$ offen ist, sobald G offen ist. Wegen

$$S_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} S_\mu$$

gilt $S_\mu \subseteq S_\nu$, sobald $\mu > \nu$ ist.

Somit erhalten wir für das Intervall $I = (a, b)$:

$$\Gamma^- I = \bigcup_{a<\lambda<b} S_\lambda = \bigcup_{a<\lambda} S_\lambda.$$

Wir zeigen : $\Gamma^- I = \operatorname{int} S_a$. Sei $x \in \operatorname{int} S_a$, d.h. $x = y + ae$ für ein $y \in C$. Da C offen ist, existiert eine Umgebung $U(y)$ von y mit $U(y) \subseteq C$.

Somit gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $y - \epsilon e \in C$. Daraus ergibt sich :

$$x = (y - \epsilon e) + (a + \epsilon)e \in S_{a+\epsilon}, \quad \text{d.h.} \quad x \in \bigcup_{a<\lambda} S_\lambda.$$

Sei umgekehrt

$$x \in \bigcup_{a<\lambda} S_\lambda.$$

Dann existiert ein $\lambda > a$ mit $x \in S_\lambda$, d.h.

$$x = y + \lambda e \quad \text{für ein} \quad y \in \bar{C}.$$

Daraus folgt (vgl. DEFINITION 2.6)

$$x = (y + (\lambda - a)e) + ae \in C + ae = \operatorname{int} S_a.$$

Somit ist Γ unterhalbstetig.

Wir zeigen noch $\Gamma x \neq \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Wir wählen ein $y \in \bar{C}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so groß, daß gilt $x + \lambda e \geq y$.

Daraus folgt $x + \lambda e \in C$ und somit $x \in S_{-\lambda}$, d.h. $-\lambda \in \Gamma x$.

Setzen wir jetzt $z_s(x) = z(x) - z(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist z_s wieder quasikonkav und stetig. Darüber hinaus ist z_s streng monoton, d.h., aus $a \succ b$ folgt $z_s(a) > z_s(b)$. Sei $a \succ b$. Aus

$$b \in S_{z_s(b)}$$

folgt

$$b - z_s(b)e + (\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}) \subseteq C$$

und somit

$$a \in b + (\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}) \subseteq C + z_s(b)e = \operatorname{int} S_{z_s(b)} = \{x \,|\, z_s(x) > z_s(b)\},$$

d.h. $z_s(a) > z_s(b)$. Nun folgt aus $Y \cap C = \emptyset$ wegen $C = \{x \,|\, z_s(x) > 0\}$ die Beziehung

$$z_s(y) \leq z_s(0) \quad (= 0) \quad \text{für alle} \quad y \in Y.$$

<u>(ii) Hinlänglichkeit :</u>

Sei z ein quasikonkaves, stetiges, streng monotones Funktional mit

$$z(y^0) \geq z(y) \quad \text{für alle} \quad y \in Y.$$

O.B.d.A. seien $y^0 = 0$ und $z(0) = 0$. Sonst betrachten wir $\bar{Y} = Y - y^0$ und $\bar{z}(\cdot) := z(\cdot) - z(0)$.

Sei $C = \{x \,|\, z(x) > 0\}$. Dann ist $C \neq \emptyset$, denn es gilt $R^n_+ \backslash \{0\} \subseteq C$. Wegen der Stetigkeit von z ist C offen, und es gilt $\bar{C} = \{x \,|\, z(x) \geq 0\}$. Seien $y \in \bar{C}$ und $x \succ y$. Wegen der strengen Monotonie von z gilt $z(x) > z(y) \geq 0$ und somit $x \in C$. Mithin ist $y + (\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}) \subseteq C$. Aus $z(0) \geq z(y) \quad \forall y \in Y$ folgt $Y \cap C = \emptyset$. Somit ist $y^0 \in M(Y) \quad \Box$.

<u>**BEMERKUNG 2.5:**</u> Die 1. Forderung in DEFINITION 2.6 ist, wie aus dem obigen Beweis hervorgeht, eine direkte Folgerung aus der strengen Monotonie von z. Ist C ein offener konvexer Kegel mit $R^n_+ \backslash \{0\} \subseteq C$, so gilt $\bar{C} + (\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}) \subseteq \bar{C} + C \subseteq C$, denn es gilt $C = \operatorname{int} \bar{C}$. Somit ist die 1. Forderung aus DEFINITION 2.6 bei LAMPE (1980, Def. 3.4) ebenfalls erfüllt. Mithin kann man genau wie in SATZ 2.5 zeigen, daß jedes eigentliche Maximalelement nach der Definition von LAMPE das skalare Problem

$$z(y) \longrightarrow \max\,, \qquad y \in Y$$

löst, wobei z ein geeignetes quasikonkaves, stetiges, streng monotones Funktional bezeichnet.

Daß die Umkehrung nicht mehr richtig zu sein braucht, zeigt folgendes Beispiel:

Sei

$$Y = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = t, \quad y = \frac{1}{t}, \quad t \geq 1\}.$$

Das Funktional $z : \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$z(x, y) = \frac{xy - 1}{x}$$

ist streng monoton, denn es gilt

$$z'_x = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \text{und} \quad z'_y = 1 > 0,$$

und konkav auf $\operatorname{int} \mathbb{R}^2_+$, denn dort ist die Hesse-Matrix negativ definit. Da z auf Y identisch Null ist, gilt

$$\sup_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Y} z(x, y) = z(1, 1).$$

Angenommen, es existiert ein offener konvexer Kegel $C \supseteq \mathbb{R}^2_+ \backslash \{0\}$ mit

$$C \cap (Y - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \emptyset.$$

Sei $h_0 = (1,0)^T$. Wegen $h_0 \in \mathbb{R}^2_+ \backslash \{0\}$ gilt $h_0 \in C$, und folglich gibt es eine Umgebung $U(h_0)$ von h_0 mit $U(h_0) \subseteq C$. Wir wählen $\epsilon \in (0,1)$ mit $h_\epsilon = (1,-\epsilon)^T \in U(h_0)$. Wir erhalten wegen $\lambda h_\epsilon \in C$ für $\lambda > 0$

$$\frac{1-\epsilon}{\epsilon} h_\epsilon \in C.$$

Offenbar gilt

$$\frac{1-\epsilon}{\epsilon} h_\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} - 1 \\ \epsilon - 1 \end{pmatrix} \in Y - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich der Widerspruch

$$\frac{1-\epsilon}{\epsilon} h_\epsilon \in C \cap (Y - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

KOROLLAR 2.3: Es gilt $M(Y) \subseteq \operatorname{Max} Y$.

Beweis :

Sei $y \in M(Y)$ und angenommen, es gibt ein $w \in Y$ mit $w \succ y$. Dann gilt $z(w) > z(y)$ für jedes streng monotone Funktional z im Widerspruch zu SATZ 2.5 $\square$.

BEMERKUNG 2.6: In GERSTEWITZ (1983a) findet man noch folgenden Satz (Satz 4.):

Ist $y^0 \in \operatorname{Max} Y$, so existiert ein konkaves, stetiges, monotones Funktional z, so daß gilt

$$z(y^0) \geq z(y) \quad \text{für alle} \quad y \in Y.$$

Der Beweis enthält denselben Fehlschluß wie Satz 2, die Aussage ist jedoch richtig, denn man kann $z(x) \equiv 0$ nehmen. Die Aussage läßt sich nicht dahingehend verschärfen, daß ein konkaves, stetiges, streng monotones Funktional mit der obigen Eigenschaft existiert, denn sei

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x + 1 \end{pmatrix}, \quad x \in G := (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

Für $Y = f(G) - \mathbb{R}^k_+$ gilt, wie man leicht nachrechnet, $0 \in \operatorname{Max} Y$. Sei z streng monoton und stetig, und es gelte

$$z(0) \geq z(f(x)) \quad \text{für alle} \quad x \in G.$$

Dann folgt

$$z(0) \geq \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} z(f(x)) = z(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Wegen der strengen Monotonie von z gilt aber in Widerspruch dazu

$$z(0) < z(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

2.3 Trennung konvexer Mengen

Es seien hier einige Trennungssätze aufgezählt, auf die in der Arbeit öfter Bezug genommen wird.

SATZ 2.5: Seien A und B disjunkte konvexe Mengen und A sei offen. Dann existieren ein nichttriviales lineares Funktional z und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$z^T a < \alpha \leq z^T b \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

SATZ 2.6: Seien A und B disjunkte konvexe Mengen, wobei A abgeschlossen und B kompakt sei. Dann existieren ein nichttriviales lineares Funktional z und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$z^T a < \alpha_1 < \alpha_2 < z^T b \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

SATZ 2.7:(BRAGARD/VANGELDÈRE (1977))

Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei abgeschlossene konvexe Kegel und $S_i = K_i \cap (-K_i), \quad i = 1, 2$. Wenn K_2 polyedrisch ist und $K_1 \cap K_2 \subseteq S_1$ mit $K_1 \neq S_1$ gilt, so existiert ein nichttriviales lineares Funktional z mit

$$\begin{aligned} &z^T x > 0 \qquad \forall x \in K_1 \backslash S_1, \\ &z^T x = 0 \qquad \forall x \in S_1 + S_2, \\ &z^T x \leq 0 \qquad \forall x \in K_2. \end{aligned}$$

3 Dualität in der linearen Vektoroptimierung

In diesem Kapitel werden die wichtigsten der aus der Literatur bekannten Dualpaare dargestellt und ihre Beziehungen zueinander untersucht.

3.1 Dualitätskonzepte in der linearen Vektoroptimierung

3.1.1 Das Dualpaar von GALE/KUHN/TUCKER

Für

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^l, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^k, \quad H \in \mathbb{R}^{k \times l}$$

und für gegebene

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{m \times l}, \quad C \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

betrachten wir die Vektoroptimierungsprobleme:

$$(P_1) \qquad \begin{array}{l} H \to \text{Max}\,, \\ Cx \geq Hy, \\ Ax \leq By, \\ x \geq 0, \\ y > 0; \end{array} \qquad\qquad (D_1) \qquad \begin{array}{l} H \to \text{Min}\,, \\ u^T B \leq v^T H, \\ u^T A \geq v^T C, \\ u \geq 0, \\ v > 0. \end{array}$$

SATZ 3.1: (vgl. GALE/KUHN/TUCKER (1951))

(i) $\operatorname{Max} P_1 = \operatorname{Min} D_1$;

(ii) $\operatorname{Max} P_1 \neq \emptyset$ (bzw. $\operatorname{Min} D_1 \neq \emptyset$) genau dann, wenn $P_1 \neq \emptyset$ und $D_1 \neq \emptyset$.

(iii) Ist $H_0 \in \operatorname{Max} P_1$ mit $x = x_0$ und $y = y_0$ ($H_0 \in \operatorname{Min} D_1$ mit $u = u_0$ und $v = v_0$), so gilt $Cx_0 = H_0 y_0 \quad (u_0^T B = v_0^T H_0)$.

(iv) Ist $H_0 \in P_1$ mit $x = x_0$ und $y = y_0$ und $H_0 \in D_1$ mit $u = u_0$ und $v = v_0$, wobei $Cx_0 = H_0 y_0$ und $u_0^T B = v_0^T H_0$ gilt, so ist $H_0 \in \operatorname{Max} P_1 \cap \operatorname{Min} D_1$.

Setzen wir in (P_1), (D_1) $l = 1$, so erhalten wir

$$(P_2) \quad \begin{array}{l} h \to \operatorname{Max}, \\ Cx \geq h, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0; \end{array} \qquad (D_2) \quad \begin{array}{l} h \to \operatorname{Min}, \\ u^T b \leq v^T h, \\ u^T A \geq v^T C, \\ u \geq 0, \\ v > 0. \end{array}$$

Darüber hinaus wollen wir auch folgende Modifikation (vgl. BEMERKUNG 3.3) des obigen Paares betrachten:

$$(P_3) \quad \begin{array}{l} Cx \to \operatorname{Max}, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0 \ ; \end{array} \qquad (D_3) \quad \begin{array}{l} h \to \operatorname{Min}, \\ u^T b = v^T h, \\ u^T A \geq v^T C, \\ u \geq 0, \\ v > 0. \end{array}$$

3.1.2 Das Dualpaar von KORNBLUTH

Indem wir die Bezeichnungen aus 3.1.1. beibehalten, definieren wir:

$$(P_4) \quad \begin{array}{l} Cx \to \operatorname{Max}, \\ Ax \leq By, \\ x \geq 0 \ , \\ y > 0; \end{array} \qquad (D_4) \quad \begin{array}{l} u^T B \to \operatorname{Min}, \\ A^T u \geq C^T v, \\ u \geq 0, \\ v > 0. \end{array}$$

Es gilt (vgl. KORNBLUTH (1974)):

SATZ 3.2: (P_4) ist lösbar für ein $y_0 > 0$ genau dann, wenn (D_4) für ein $v_0 > 0$ lösbar ist.

3.1.3 Das Dualpaar von RÖDDER

Mit denselben Bezeichnungen wie in 3.1.1. ($k = l$) läßt sich das Dualpaar von RÖDDER (1976) wie folgt schreiben:

$$(P_5) \qquad \begin{array}{l} Cx \to \text{Max}\,, \\ Ax \leq By_0, \\ x \geq 0\;; \end{array} \qquad\qquad (D_5) \qquad \begin{array}{l} u^T B \to \text{Min}\,, \\ A^T u \geq C^T y_0, \\ u \geq 0, \quad y_0 > 0. \end{array}$$

<u>SATZ 3.3:</u>

(i) Es gilt $Cx \not> B^T u$ für alle zulässigen x und y.

(ii) Entweder gilt $P_5 = \emptyset$ und $D_5 = \emptyset$ oder es ist $\text{Max}\, P_5 \cap \text{Min}\, D_5 \neq \emptyset$.

3.1.4 Das Dualpaar von ISERMANN

Für $x \in \mathbb{R}^n, \quad U \in \mathbb{R}^{k \times m}$ definieren wir:

$$(P_6) \qquad \begin{array}{l} Cx \to \text{Max}\,, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0\;; \end{array} \qquad\qquad (D_6) \qquad \begin{array}{l} Ub \to \text{Min}\,, \\ UAw \not< Cw, \\ \text{für alle } w \geq 0. \end{array}$$

(D_6) ist äquivalent zu

$$(D_6') \qquad \begin{array}{l} Ub \to \text{Min}\,, \\ t^T(UA - C) \geq 0, \\ t^T U \geq 0 \text{ für ein } t > 0. \end{array}$$

<u>BEMERKUNG 3.1:</u> Die Äquivalenz von (D_6) und (D_6') kann wie folgt gezeigt werden:

Sei U zulässig für (D_6'). Angenommen, es gilt $UAw \prec Cw$ für ein $w \geq 0$, so erhalten wir den Widerspruch $t^T(UA - C)w < 0$ für all $t > 0$. Somit ist U zulässig für (D_6).

Sei U zulässig für (D_6). Betrachten wir die konvexen abgeschlossenen Kegel $K_1 = -\mathbb{R}^k_+, \quad K_2 = \{z \in \mathbb{R}^k \mid z = (UA - C)w, \quad w \geq 0\}$.

Nach SATZ 2.7 existiert ein $t \in \mathbb{R}^k$, so daß gilt:

$t^T x < 0 \qquad \forall x \in K_1 \backslash S_1,$

$t^T x = 0 \qquad \forall x \in S_1 + S_2,$

$t^T x \geq 0 \qquad \forall x \in K_2.$

Daraus folgt $t > 0$ und $t^T(UA - C)w \geq 0$ für alle $w \geq 0$, d.h. $t^T(UA - C) \geq 0$, was die Zulässigkeut von U für (D_6') zeigt.

Folgender Satz enthält die wichtigsten Aussagen über (P_6) und (D_6) (vgl. ISERMANN (1978)):

SATZ 3.4 :

(i) Es gilt $Cx \not\geq Ub$ für alle zulässigen x und U.

(ii) Ist $b \neq 0$, so gilt $\operatorname{Max} P_6 \subseteq \operatorname{Min} D_6$

(iii) $\operatorname{Min} D_6 \subseteq \operatorname{Max} P_6$

3.1.5 Duale Probleme vom WOLFE-Typ

Für affine Funktionen geht das Dualpaar aus GERSTEWITZ (1982a) über in

$$(P_7) \quad \begin{array}{l} Cx \to \operatorname{Min}, \\ Ax \geq b, \end{array} \qquad (D_7) \quad \begin{array}{l} Cx + L(b - Ax) \to \operatorname{Max}, \\ \exists z > 0 \text{ mit} \\ z^T(C - LA) = 0^T, \quad L \geq 0. \end{array}$$

oder mit dem modifizierten WOLFE-dualen Problem aus Abschnitt 4.3 :

$$(D_7')(= (D_{10})) \begin{array}{l} Cx + L(b - Ax) \to \operatorname{Max}, \\ \exists z > 0 \text{ mit} \\ z^T(C - LA) = 0^T, \quad z^T L \geq 0. \end{array}$$

3.2 Einige Hilfssätze und das Lemma von FARKAS

Wir beweisen zunächst folgendes

LEMMA 3.1: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mit $\operatorname{Kern} A \subseteq \operatorname{Kern} B$. Seien $v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$. $y^T A = v^T B$ gilt genau dann, wenn es ein $U \in \mathbb{R}^{p \times m}$ derart gibt, daß gilt: $UA = B$, $v^T U = y^T$.

Beweis :

a) Sei $UA = B$, $v^T U = y^T$. Dann gilt $v^T UA = v^T B$ und $v^T UA = y^T A$, also $v^T B = y^T A$.

b) Sei $u = (u_{11}, \ldots, u_{1m}, u_{21}, \ldots, u_{2m}, \ldots, u_{p1}, \ldots, u_{pm})^T$. Wir betrachten das zu $UA = B$, $v^T U = y^T$ äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\
a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\
\dots \\
\dots \\
a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \\
v_1 & 0 & \dots & 0 & v_2 & 0 & \dots & 0 & v_p & 0 & \dots & 0 \\
0 & v_1 & \dots & 0 & 0 & v_2 & \dots & 0 & 0 & v_p & \dots & 0 \\
\dots \\
0 & 0 & \dots & v_1 & 0 & 0 & \dots & v_2 & 0 & 0 & \dots & v_p
\end{pmatrix} u = \begin{pmatrix}
b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{p1} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{p2} \\ \dots \\ \dots \\ b_{1n} \\ b_{2n} \\ \dots \\ b_{pn} \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m
\end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

wobei $U = \|u_{ij}\|, \quad A = \|a_{ij}\|, \quad B = \|b_{ij}\| \quad .$

In der zu (3.2.1) gehörenden erweiterten Koeffizientenmatrix führen wir folgende Umformungen aus, wobei o.B.d.A. $v_1 \neq 0$ sei. Wir addieren das $(-\frac{v_k}{v_1})$-fache der i-ten Spalte $(i = 1, 2, \dots, m)$ zur $(i + (k-1)m)$-ten Spalte $(k = 2, \dots, p)$. Dann addieren wir geeignete Vielfache der Zeilen mit den Nummern $j+1, j+2, \dots, j+n-1$ zur j-ten Zeile $(j = 1, 2, \dots, n)$ und erhalten schließlich:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
a_{11} & \dots & a_{m1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & & \frac{1}{v_1}\sum_{i=1}^{p} v_i b_{i1} \\
\dots & \dots & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{11} & \dots & a_{m1} & & & b_{p1} \\
\dots & \dots & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
\dots & \dots & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
a_{1n} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & & \frac{1}{v_1}\sum_{i=1}^{p} v_i b_{in} \\
\dots & \dots & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1n} & \dots & a_{mn} & & & b_{pn} \\
v_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & & y_1 \\
\dots & \dots & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
0 & \dots & v_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & & y_m
\end{array}\right)$$

Nach Addition geeigneter Vielfache der letzten m Zeilen zu der $(kp+1)$-ten

Zeile ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) und Umordnung der Zeilen ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} v_1 E & 0 & 0 & \ldots & 0 & y \\ 0 & A^T & 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A^T & b_p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{v_1}(v^T B - y^T A)^T \end{array}\right),$$

wobei $b_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})^T$ ist.

Aus Kern$A \subseteq$ Kern$B$ folgt leicht die Lösbarkeit von $A^T u = b_i \quad (i = 1, \ldots, p)$ und somit wegen $v^T B = y^T A$ auch die Lösbarkeit von (3.2.1) $\Box$.

KOROLLAR 3.1: Seien $a, y \in \mathbb{R}^n, \quad b, v \in \mathbb{R}^p \quad$ mit $a \neq 0$ und $v \neq 0$.

$y^T a = v^T b$ gilt genau dann, wenn es ein $U \in \mathbb{R}^{p \times m}$ derart gibt, daß gilt $Ua = b, \quad v^T U = y^T$.

Beweis:

Aus $a \neq 0$ und $a\xi = 0$ für $\xi \in \mathbb{R}$ folgt $\xi = 0$ und mithin $b\xi = 0$. Somit folgt die Behauptung aus LEMMA 3.1 (n=1) $\Box$.

Als Folgerung aus LEMMA 3.1 erhalten wir nächststehende Verallgemeinerung des Lemmas von FARKAS (vgl. ROCKAFELLAR (1970)).

SATZ 3.5:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mit Kern$A \subseteq$ Kern$B$. Genau eines der folgenden Systeme besitzt eine lösung:

$$Ax \leq 0, \quad Bx \succ 0; \tag{3.2.2}$$

$$UA = B, \quad z^T U \geq 0, \quad z > 0. \tag{3.2.3}$$

Beweis:

Nach LEMMA 3.1 ist das System (3.2.3) genau dann lösbar, wenn es ein $y \geq 0$ gibt, so daß gilt:

$$z^T B = y^T A, \tag{3.2.4}$$

Wir zeigen zunächst, daß die Systeme (3.2.2) und (3.2.4) nicht gleichzeitig lösbar sind. Sei x eine Lösung von (3.2.2) und (y, z) eine Lösung von (3.2.4). Dann ist einerseits $z^T Bx > 0$ und andererseits $z^T Bx = y^T Ax \leq 0$, was ein Widerspruch ist.

Nun genügt es zu zeigen, daß beide Systeme nicht glechzeitig inkonsistent sein können. Wir geben dafür zwei Beweise an.

I. Sei (3.2.4) nicht lösbar. Dann gilt $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ mit $K_1 = \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, w = A^T y, \quad y \geq 0\}$ und $K_2 = \{u \in \mathbb{R}^n \,|\, u = B^T z, \quad z > 0\}$. Nach ROCKAFELLAR ((1970), Satz 6.6) gilt $B^T(\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+) = \operatorname{r.int} B^T(\mathbb{R}^n_+)$ und es ist somit $\operatorname{r.int} K_2 = K_2$. Wir wenden SATZ 2.5 auf die Mengen K_2 und $K_1 \cap \operatorname{aff} K_2$ an, welche konvex, disjunkt und nichtleer sind, letzteres wegen $0 \in K_1 \cap \operatorname{aff} K_2$. Somit existieren ein lineares Funktional $\bar{t}$ auf aff K_2 und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\bar{t}^T w \leq \alpha < \bar{t}^T u \qquad \forall w \in K_1 \cap \operatorname{aff} K_2, \quad \forall u \in K_2,$$

wobei, wie man leicht sieht, $\alpha = 0$ gewählt werden kann. Nun läßt sich aber $\bar{t}$ zu einem Funktional t auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen (vgl. ELSTER etc. (1977) Satz 2.35), so daß gilt

$$t^T w \leq 0 < t^T u \qquad \forall w \in K_1, \quad \forall u \in K_2.$$

Mithin ist $z^T Bt > 0$ für alle $z > 0$ und daher auch $Bt \succ 0$. Aus $y^T At \leq 0$ für alle $y \geq 0$ folgt leicht $At \leq 0$, und somit ist t eine Lösung von (3.2.2).

II. Angenommen (3.2.2) hat keine Lösung. Betrachten wir das Optimierungsproblem

$$Bx \longrightarrow \mathrm{Max}\,, \quad Ax \leq 0,$$

bedeutet dies, daß $0 \in \mathrm{Max}\,\{Bx \,|\, Ax \leq 0\}$ gilt und wegen SATZ 2.3 existiert ein $z > 0$ mit $0 = \max\,\{z^T Bx \,|\, Ax \leq 0\}$. Das duale Problem

$$0^T y \longrightarrow \min\,, \quad y^T A = z^T B, \quad y \geq 0,$$

besitzt somit eine Lösung (vgl. z.B. VOGEL (1970)), mit anderen Worten ist das System (3.2.4) lösbar $\square$.

BEMERKUNG 3.2:

In der gewöhnlichen linearen Optimierung können die Dualitätsaussagen direkt aus dem Lemma von FARKAS hergeleitet werden. Wir zeigen jetzt, wie SATZ 3.4 (ii) aus SATZ 3.5 gefolgert werden kann.

Sei $b \neq 0$ und $Cx_0 \in \mathrm{Max}\,P_6$. Angenommen, es gibt ein $x_1 \geq 0$ mit $Ax_1 \leq 0$ und $Cx_1 \geq 0$. Dann ist $A(x_1 + x_0) \leq b, \quad x_1 + x_0 \geq 0$ und folglich muß $Cx_1 + Cx_0 \not\succ Cx_0$ gelten. Aus $Cx_1 \succ 0$ ergibt sich im Widerspruch dazu $Cx_1 + Cx_0 \succ Cx_0$.

Somit sit folgendes System inkonsistent

$$\begin{pmatrix} A & b \\ -E & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \leq 0, \quad (C, Cx_0) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \succ 0.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} A & b \\ -E & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad \text{folgt} \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und somit} \qquad (C, Cx_0) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

Nach SATZ 3.5 existieren (U_1, V_1, s) und $z > 0$ mit

$$(U_1, V_1, s) \begin{pmatrix} A & b \\ -E & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = (C, Cx_0), \quad z^T U_1 \geq 0, \quad z^T V_1 \geq 0, \quad z^T s \geq 0$$

bzw. äquivalent dazu,

$$\begin{aligned} & z^T (U_1 A - C) \geq 0, \quad z^T U_1 \geq 0, \\ & U_1 b + s = Cx_0, \quad z^T s \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Daraus folgt

$$z^T U_1 A x_0 \geq z^T Cx_0 = z^T U_1 b + z^T s,$$

und somit ist einerseits

$$z^T U_1(b - Ax_0) + z^T s \leq 0.$$

wegen $Ax_0 \leq b$, $z^T U_1 \geq 0$ und $z^T s \geq 0$ gilt andererseits

$$z^T U_1(b - Ax_0) + z^T s \geq 0.$$

also ist

$$z^T Cx_0 = z^T U_1 b + z^T s = z^T U_1 Ax_0.$$

Es folgt nun leicht

$$z^T s = z^T Cx_0 - z^T U_1 b = -z^T U_1(b - Ax_0) \leq 0 \quad \text{und mithin} \quad z^T s = 0.$$

Wegen $z^T s = 0^T b, \quad z > 0, \quad b \neq 0$ existiert nach KOROLLAR 3.1 ein U_2 mit $z^T U_2 = 0^T$ und $U_2 b = s$.

Sei $U_0 = U_1 + U_2$. Dann gilt

$$z^T(U_0 A - C) \geq 0, \quad z^T U_0 \geq 0,$$

d.h., U_0 ist zulässig für (D_6) ind (3.2.5) geht über in $U_0 b = Cx_0$. Nach SATZ 3.4 (i) folgt $U_0 b \in \operatorname{Min} D_6$.

3.3 Vergleich einiger Dualitätskonzepte

In diesem Abschnitt werden die Relationen zwischen den in Abschnitt 3.1 vorgestellten Problemen untersucht. Als Ausgangspunkt dient dabei das Problempaar von GALE/KUHN/TUCKER $((P_1),(D_1))$ bzw. $((P_2),(D_2))$, $((P_3),(D_3))$.

Wir stellen folgende Bemerkung voran:

BEMERKUNG 3.3:

(i) Es gilt offenbar $\operatorname{Max} P_2 = \operatorname{Max} P_3$.

(ii) Es gilt $\operatorname{Min} D_2 = \operatorname{Min} D_3$. Es genügt $D_2 \subseteq D_3$ zu zeigen. Sei $h_0 \in D_2$. Dann ist $h_0 = h_1 + k$ mit $k \in \mathbb{R}^k_+$ und $u^T b \leq v^T h_1, \quad u^T A \geq v^T C$ für gewisse $u \geq 0$ und $v > 0$. Sei $r = (\frac{1}{v_1}(v^T h_0 - u^T b), 0, \ldots, 0)^T$ und $h_2 = h_0 - r$. Es gilt $r \in \mathbb{R}^k_+$ und $v^T h_2 = v^T h_0 - v^T r = u^T b$ und somit $h_0 = h_2 + r \in D_3$.

(iii) Nach BEMERKUNG 3.1 ist die Dualaufgabe von FIALA (1981) identisch mit der Dualaufgabe von ISERMANN aus Abschnitt 3.1.4.

Die Beziehungen zum Dualpaar von KORNBLUTH $((P_4),(D_4))$ bilden den Inhalt von

SATZ 3.6: (RÖDDER (1977))

(i) Ist $H_0 \in \operatorname{Max} P_1$ mit $x = x_0$ und $y = y_0$, so gilt $Cx_0 \in \operatorname{Max} P_4$ für $y = y_0$.

(ii) Ist $Cx_0 \in \operatorname{Max} P_4$ für $y = y_0$, so existiert ein $H_0 \in \operatorname{Max} P_1$ mit $x = x_0$ und $y = y_0$.

(iii) Für (D_1) und (D_4) gelten die analogen Aussagen.

Beweis:

(i) Angenommen, es gibt ein $x \geq 0$, so daß $Cx \succ Cx_0$ und $Ax \leq By_0$. Nach SATZ 3.1 (iii) gilt $Cx_0 = H_0 y_0$. Sei $c = Cx - Cx_0$ und

$$H_1 = H_0 + \begin{pmatrix} \frac{c_1}{y_{c_1}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{c_k}{y_{c_1}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $H_1 \succ H_0$ und $H_1 y_0 = H_0 y_0 + c = Cx$ und mithin $H_1 \in P_1$ im Widerspruch zur Maximalität von H_0.

(ii) Nach dem Effizienztheorem (SATZ 2.3) gibt es ein $v_0 > 0$ mit

$$v_0^T Cx_0 = \max\{v_0^T Cx \mid Ax \leq By_0, \quad x \geq 0\}.$$

Nach dem Dualitätssatz der linearen Optimierung folgt $v_0^T Cx_0 = u_0^T By_0$ für ein u_0 mit $u_0^T A \geq v_0^T C, \quad u_0 \geq 0$. Nach KOROLLAR 3.1 existiert ein H_0 mit

$$H_0 y_0 = Cx_0 \quad \text{und} \quad v_0^T H_0 = u_0^T B.$$

Nach SATZ 3.1 (iv) gilt $H_0 \in \operatorname{Max} P_1$.

(iii) Folgt aus der Symmetrie der Probleme $\square$.

Die Relation zum Dualpaar von ISERMANN $((P_6), (D_6))$ zeigt folgender

<u>SATZ 3.7:</u> (vgl. auch ISERMANN (1978))

(i) Es gelten $D_6 \subseteq D_3$ und $\operatorname{Min} D_6 \subseteq \operatorname{Min} D_3$;

(ii) Ist $b \neq 0$, so gelten $D_3 \subseteq D_6$ und $\operatorname{Min} D_3 \subseteq \operatorname{Min} D_6$.

<u>Beweis:</u>

(i) Sei $U_0 b \in D_6$. Aus $t^T(U_0 A - C) \geq 0, \quad t^T U_0 \geq 0$ erhalten wir mit $u^T = t^T U_0$:

$$u^T b = t^T U_0 b, \quad u^T A - t^C \geq 0, \quad u \geq 0, \quad t > 0.$$

Somit ist $U_0 b \in D_3$.

Sei $h_0 = U_0 b \in \operatorname{Min} D_6$. Angenommen, es gibt ein h_1 mit $u^T b = v^T h_1, \quad u^T A \geq v^T C$ für gewisse $u \geq 0, \quad v > 0$, so daß $h_1 \prec h_0$ gilt. Wir wählen

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \frac{u_2}{v_1} & \dots & \frac{u_m}{v_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $v^T U_1 = u^T$ und somit $v^T U_1 A \geq v^T C$ und $v^T U_1 \geq 0$.

Aus SATZ 3.4 (iii) folgt $U_0 b = Cx_0$ für ein $x_0 \geq 0$ mit $Ax_0 \leq b$ und wir erhalten den Widerspruch :

$$v^T U_1 b \geq v^T U_1 A x_0 \geq v^T C x_0 = v^T U_0 b = v^T h_0 > v^T h_1 = v^T U_1 b.$$

Somit ist $h_0 \in \operatorname{Min} D_3$.

(ii) Sie $h_0 \in D_3$. Dann existieren $u \geq 0$ und $v > 0$ mit $u^T b = v^T h_0, \quad u^T A \geq v^T C$. Nach KOROLLAR 3.1 existiert ein U_0 mit $U_0 b = h_0$ und $v^T U_0 = u^T$. Somit ist $v^T U_0 A = u^T A \geq v^T C$ und $v^T U_0 \geq 0$, d.h. $h_0 \in D_6$.

Sei $h_0 = U_0 b \in \operatorname{Min} D_3$. Angenommen, es gilt $U_1 b \leq U_0 b$. Aus (i) folgt $U_1 b \in D_3$ und somit $U_1 b = U_0 b$. Mithin ist $U_0 b \in \operatorname{Min} D_6 \quad \square$.

BEMERKUNG 3.4:

Bei ISERMANN (1978) fehlt die Bedingung $b \neq 0$, die, wie in spätere Arbeiten gezeigt wurde (vgl. z.B. LAMPE (1980)), wesentlich ist. In LAMPE (1980) ist jedoch der Beweis der Beziehung $\text{Min}\, D_6 \subseteq \text{Min}\, D_3$ nicht korrekt.

Bezüglich des Problempaars von RÖDDER $((P_5), (D_5))$ gilt folgender

SATZ 3.8:

(i) Sei $H_0 \in \text{Max}\, P_1$ für $x = x_0$ und $y = y_0$ sowie $H_0 \in \text{Min}\, D_1$ für $u = u_0$ und $v = v_0$ und H_0 sei symmetrisch. Dann gilt $Cx_0 \in \text{Max}\, P_5 \bigcap \text{Min}\, D_5$ und $Cx_0 = B^T u_0$.

(ii) Seien $Cx_0 \in \text{Max}\, P_5$, $\quad B^T u_0 \in \text{Min}\, D_5$ und es gelte $Cx_0 = B^T u_0$. Dann existiert eine symmetrische Matrix H_0, die beide Probleme (P_1) und (D_1) löst.

Beweis:

(i) Nach SATZ 3.1 (iii) müssen $Cx_0 = H_0 y_0$ und $u_0^T B = y_0^T H_0$ gelten, also ist $Cx_0 = B^T u_0$. Der Rest der Behauptung folgt jetzt aus der schwachen Dualitätsaussage (SATZ 3.3 (i)).

(ii) Seien $Cx_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^T$, $\quad y_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_k)^T$ und $w^T = (w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1k}, w_{22}, w_{23}, \ldots, w_{2k}, w_{33}, \ldots, w_{3k}, \ldots, w_{kk})$.

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & b_2 & b_3 & \ldots & b_k & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & \ldots & 0 & 0 & b_2 & \ldots & 0 & b_3 & \ldots & b_k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_1 & 0 & 0 & \ldots & b_2 & 0 & \ldots & b_3 & \ldots & b_k \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \ldots \\ a_k \end{pmatrix}$$

ist wegen

$$det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_k \\ 0 & b_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_k \end{pmatrix} \neq 0$$

lösbar.

Bezeichnen wir mit H_0 die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1k} \\ w_{12} & w_{22} & \ldots & w_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{1k} & w_{2k} & \ldots & w_{kk} \end{pmatrix},$$

so läßt sich das System in der Form $H_0 y_0 = Cx_0$ schreiben. Somit gilt $H_0^T y_0 = H_0 y_0 = Cx_0 = B^T u_0$. Gemäß SATZ 3.1 (iv) folgt die Behauptung $\Box$.

Um eine Verbindung zum WOLFE-dualen Problem (D_7) herzustellen, schicken wir folgendes Lemma voran.

LEMMA 3.2:

Seien $a \in \mathbb{R}_+^n \backslash \{0\}$, $\quad b \in \mathbb{R}_+^n$. Es gilt $v^T a = b^T y$ für $v \in \text{int}\, \mathbb{R}_+^n$, $\quad y \in \mathbb{R}^m$ genau dann, wenn es ein $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $L \geq 0$ derart gibt, daß gilt: $Ly = a$, $\quad v^T L = b^T$.

Beweis:

(i) Seien $Ly = a, \quad v^T L = b^T, \quad L \geq 0$. Dann gilt $v^T Ly = v^T a$ und $v^T Ly = b^T y$, also $v^T a = b^T y$.

(ii) Sei $w^T = (w_{11}, \ldots, w_{1m}, w_{21}, \ldots, w_{2m}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nm})$. Wir betrachten das zu $Ly = a, \quad v^T L = b^T$ äquivalente System

$$\mathcal{A}w = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & y_1 & y_2 & \ldots & y_m & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \ldots & \ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ v_1 & 0 & \ldots & 0 & v_2 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & v_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & v_1 & \ldots & 0 & 0 & v_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & v_n & \ldots & 0 \\ & & & & \ldots & \ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & v_1 & 0 & 0 & \ldots & v_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & v_n \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

mit $w \geq 0$. Sei $u \in \mathbb{R}^{n+m}$ derart gewählt, daß gilt $u^T \mathcal{A} \geq 0$. Daraus erhalten wir durch einfache Rechnung für $b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} u_1(b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m) + (u_{n+1} b_1 + \ldots + u_{n+m} b_m) v_1 &\geq 0, \\ u_2(b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m) + (u_{n+1} b_1 + \ldots + u_{n+m} b_m) v_2 &\geq 0, \\ &\ldots \\ u_n(b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m) + (u_{n+1} b_1 + \ldots + u_{n+m} b_m) v_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Es folgt weiter für $a_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \ldots, n$.

$$(u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n) b^T y + (u_{n+1} b_1 + \ldots + u_{n+m} b_m) v^T a \geq 0.$$

Nach Voraussetzung gilt $b^T y = v^T a > 0$, mithin ist

$$u^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq 0.$$

Nach dem Lemma von FARKAS (vgl. ROCKAFELLAR (1970)) ist daher das System (3.3.1) lösbar und jede Lösung $\hat{w}$ ergibt eine Matrix $L = \|\hat{w}_{ij}\|$ der geforderten Art $\square$.

BEMERKUNG 3.5:

Das zu (P_7) nach GALE/KUHN/TUCKER duale Problem (vgl. auch BEMERKUNG 3.3 (ii)) kann, wie man leicht sieht, wie folgt geschrieben werden:

$$(D_3') \qquad \begin{array}{l} h \rightarrow \text{Max} \\ z^T h = y^T b \\ z^T C = y^T A \\ y \geq 0 \\ z > 0. \end{array}$$

Wir erhalten folgenden

SATZ 3.9:

Ist die durch C vermittelte Abbildung surjektiv, dann gilt : $D_7 = D_3'$.

Beweis:

(i) Sei $Cx + L(b - Ax) \in D_7$. Dann ist für ein $z > 0$:

$$z^T(C - LA) = 0^T, \quad L \geq 0.$$

Wir setzen $z^T L = y^T$ und erhalten

$$z^T C = y^T A, \quad y \geq 0 \quad \text{und}$$

$$z^T(Cx + L(b - Ax)) = z^T Lb + z^T(C - LA)x = y^T b.$$

Somit gilt $D_7 \subseteq D_3'$.

(ii) Sei $h \in D_3'$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $y = 0$. Wir wählen $L = 0$ und haben somit $z^T(C - LA) = 0^T$. Wegen der Surjektivität von C existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Cx = h$, und somit gilt:

$$h = Cx + L(b - Ax) \in D_7.$$

b) $y \succ 0$. Wegen der Surjektivität von C existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $h \succ Cx$. Aus $z^T C = y^T A$ und $z^T h = y^T b$ erhalten wir

$$y^T b - y^T Ax = y^T b - z^T Cx = z^T h - z^T Cx,$$

d.h.

$$y^T(b - Ax) = z^T(h - Cx).$$

Nach LEMMA 3.2 existiert eine Matrix $L \geq 0$, so daß

$$z^T L = y^T \quad \text{und} \quad L(b - Ax) = h - Cx$$

gelten, also ist

$$h = Cx + L(b - Ax) \in D_7 \qquad \Box.$$

Folgendes Beispiel zeigt, daß auf die Surjektivität von C oder auf eine dazu äquivalente andere Bedingung nicht verzichtet werden kann.

BEISPIEL 3.1:

$$\text{Seien} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $h = (1, 0, -1)^T \in D_3'$, denn mit $y = 0$ ist $(1, 2, 1)C = 0^T A$ und $(1, 2, 1)h = 0^T b$.

Wir zeigen $h \notin D_7$. Angenommen, es existieren $z = (z_1, z_2, z_3)^T > 0, \quad L = \|l_{ij}\|, \quad l_{ij} \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^3$ derart, daß gilt:

$$z^T(C - LA) = 0^T \tag{3.3.2}$$
$$Cx + L(b - Ax) = h. \tag{3.3.3}$$

Aus (3.3.2) erhalten wir leicht $L = 0$. Somit geht (3.3.3) über in $Cx = h$, d.h.

$$\begin{aligned} (1,2,1)x &= 1, \\ -(1,2,1)x &= 0, \\ (1,2,1)x &= -1, \end{aligned}$$

Dies kann aber für kein $x \in \mathbb{R}^3$ gelten $\square$.

Die Bedingung der Surjektivität von C wird nicht mehr benötigt, wenn man die modifizierte Form des WOLFE-dualen Problems (D_7') benutzt. Allerdings muß der triviale Fall $A = 0$ und $b = 0$ außer Betracht gelassen werden.

SATZ 3.10:

Es gelte $Ax \neq b$ für mindestens ein $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt : $D_3' = D_7'$.

Beweis:

(i) Sei $Cx + L(b - Ax) \in D_7'$, d.h. $z^T(C - LA) = 0^T, \quad z^T L \geq 0^T, \quad z > 0$ sind erfüllt. Mit $y^T = z^T L$ gilt $y \geq 0$, $z^T C = y^T A$ und daher

$$z^T(Cx + L(b - Ax)) = z^T Lb + z^T(C - LA)x = y^T b.$$

Daraus folgt $Cx + L(b - Ax) \in D_3'$.

(ii) Sei $h \in D_3'$. Dann gilt

$$z^T h = y^T b, \quad z^T C = y^T A, \quad z > 0, \quad y \geq 0.$$

Sei $Ax' \neq b$. Es folgt

$$y^T(b - Ax') = z^T h - z^T Cx' = z^T(h - Cx'),$$

$$z \neq 0, \quad b - Ax' \neq 0.$$

Nach KOROLLAR 2.1 existiert ein L mit

$$L(b - Ax') = h - Cx' \quad \text{und} \quad z^T L = y^T.$$

Somit gilt $h \in D_7' \qquad \square$.

3.4 Sattelpunkte und lineare Vektoroptimierungsprobleme

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, den Sattelpunktbegriff für Vektorfunktionen zu verallgemeinern. Wir erklären zunächt:

DEFINITION 3.1:

Seien $S \subseteq \mathbb{R}^n, \quad T \subseteq \mathbb{R}^m, \quad f : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}^k$. $(x_0, u_0) \in S \times T$ heißt verallgemeinerter Sattelpunkt von f bezüglich $S \times T$, wenn für alle $(x, u) \in S \times T$ gilt:

$$f(x, u_0) \not\leq f(x_0, u_0) \not\leq f(x_0, u).$$

Diese Definition ist äquivalent zur Definition von RÖDDER (1977).

Folgendes Lemma wird im weiteren benötigt:

LEMMA 3.3:

Sei $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} &Ku \longrightarrow \text{Min}\,, \\ &u \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

u_0 löst (3.4.1) genau dann, wenn ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y > 0$, $\sum_{i=1}^m y_i = 1$ derart existiert, daß gilt:

$$y^T K \geq 0, \quad y^T K u_0 = 0.$$

Beweis:

Sei u_0 eine Lösung von (3.4.1). Dann gibt es ein $y > 0$ mit $\sum_{i=1}^m y_i = 1$ (vgl. SATZ 2.3), so daß

$$y^K u_0 = \min{}_{u \geq 0} y^T K u.$$

Die Annahme, es gelte $(y^T K)_j < 0$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ führt zu

$$inf_{u \geq 0} y^T K u = -\infty.$$

Es muß also $y^T K \geq 0$ gelten. Dann gilt auch $y^T K u \geq 0$ für alle $u \geq 0$ und mithin

$$0 \geq \min{}_{u \geq 0} y^T K u = y^T K u_0 \geq 0.$$

Sei nun $y^T K \geq 0$ und $y^T K u_0 = 0$. Aus $y^T K \geq 0$ folgt leicht

$$\min{}_{u \geq 0} y^T K u = 0,$$

d.h.

$$\min{}_{u \geq 0} y^T K u = y^T K u_0.$$

Nach SATZ 2.3 ist u_0 eine Lösung von (3.4.1) $\square$.

Wir betrachten nach RÖDDER (1977) folgende Funktion:

$$L(x, u) = (Cx, Cx, \ldots, Cx) + \begin{pmatrix} u^T B \\ \ldots \\ u^T B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^T Ax & \ldots & u^T Ax \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u^T Ax & \ldots & u^T Ax \end{pmatrix}$$

Für feste $x \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^m$ ist dann $L(x, u) \in \mathbb{R}^{k \times l}$.

Es gilt

SATZ 3.11:

(i) L hat einen verallgemeinerten Sattelpunkt bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ genau dann, wenn (P_4) für ein gewisses y_0 lösbar ist;

(i_1) Ist (x_0, u_0) ein verallgemeinerter Sattelpunkt von L bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$,so löst x_0 (P_4) für ein y_0;

(i_2) Wenn x_0 (P_4) mit $y = y_0$ löst, so existiert ein $u_0 \geq 0$, so daß (x_0, u_0) ein verallgemeinerter Sattelpunkt von L bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ ist.

(ii) L hat einen verallgemeinerten Sattelpunkt bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ genau dann, wenn (D_4) für ein gewisses v_0 lösbar ist;

(ii_1) Ist (x_0, u_0) ein verallgemeinerter Sattelpunkt von L bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$,so löst u_0 (D_4) für ein v_0;

(ii_2) Wenn u_0 (D_4) mit $v = v_0$ löst, so existiert ein $x_0 \geq 0$, so daß (x_0, u_0) ein verallgemeinerter Sattelpunkt von L bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ ist.

Beweis:

Aus Symmetriegründen genügt es, eine der Aussagen zu beweisen. Wir beweisen (i).

Sei (x_0, u_0) ein verallgemeinerter Sattelpunkt von L bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$. Daraus folgt, daß u_0 das Problem

$$L(x_0,u) \longrightarrow \text{Min}\,,$$
$$u \geq 0.$$

löst.

Dieses Problem ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u^T B \\ \dots \\ u^T B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^T A x_0 & \dots & u^T A x_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ u^T A x_0 & \dots & u^T A x_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Min}\,,$$

$$u \geq 0.$$

.

Wegen der Gleichheit der Zeilen genügt es,

$$u^T(B - (Ax_0, \dots, Ax_0)) \longrightarrow \text{Min}\,, \quad u \geq 0, \tag{3.4.2}$$

zu betrachten.

Nach LEMMA 3.3 hat dieses Problem genau dann die Lösung u_0, wenn folgendes System eine Lösung $y = y_0$ hat:

$$\begin{aligned} & By - Ax_0 \geq 0, \\ & u_0^T(By - Ax_0) = 0, \\ & y > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} y_i = 1. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Weiter muß x_0 das Problem

$$(Cx, Cx, \dots, Cx) - \begin{pmatrix} u_0^T Ax & \dots & u_0^T Ax \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0^T Ax & \dots & u_0^T Ax \end{pmatrix} \rightarrow \text{Max}\,, \quad , x \geq 0$$

lösen. Wegen der Gleichhheit der Spalten genügt es das reduzierte Problem zu

$$(C - \begin{pmatrix} u_0^T A \\ \dots \\ u_0^T A \end{pmatrix}) \longrightarrow \text{Max}\,, \quad , x \geq 0 \tag{3.4.4}$$

zu betrachten.

Nach LEMMA 3.3 hat dieses Problem genau dann die Lösung x_0, wenn folgendes System eine Lösung $v = v_0$ hat:

$$\begin{aligned} & v^T C - u_0^T A \leq 0, \\ & (v^T C - u_0^T A)x_0 = 0, \\ & v > 0, \quad \sum_{i=1}^{k} v_i = 1. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Aus (3.4.3) und (3.4.5) folgt, daß x_0 eine Lösung von

$$\begin{aligned} & v^T C x \longrightarrow \max\,, \\ & Ax \leq By_0 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

ist. Nach SATZ 2.3 löst x_0 (P_4) für $y = y_0$. Sei umgekehrt x_0 eine Lösung von

(P_4) für $y = y_0$. Nach SATZ 2.3 existiert ein $v > 0$, $\sum_{i=1}^k v_i = 1$, so daß x_0 eine Lösung von (3.4.6) ist. (3.4.3) und (3.4.5) sind aber die KUHN-TUCKER-Bedingungen für das Problem (3.4.6) und müssen somit für ein gewisses u_0 erfüllt sein. Das bedeutet wiederum nach LEMMA 3.3, daß x_0 eine Lösung von (3.4.4) und u_0 eine Lösung von (3.4.2) ist, d.h., (x_0, u_0) ist ein verallgemeinerter Sattelpunkt von L bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$. $\square$

Aus diesem Satz und aus SATZ 3.6 folgt leicht

KOROLLAR 3.2:

L hat einen verallgemeinerten Sattelpunkt bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ genau dann, wenn (P_1) $((D_1))$ eine Lösung besitzt.

Wenn Cx und $B^T u$ Elemente des $\mathbb{R}^k$ sind, wie z.B. beim Dualproblem von RÖDDER $((P_5), (D_5))$, läßt sich eine einfachere LAGRANGE-Funktion verwenden:

$$\mathcal{L}(x, y) = (Cx)^T + u^T (B - (Ax, \ldots, Ax)).$$

Es ist offenbar

$$(\mathcal{L}(x, y))^T = B^T u + (C - \begin{pmatrix} u^T A \\ \ldots \\ u^T A \end{pmatrix})x.$$

KOROLLAR 3.3:

Seien $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt SATZ 3.11 auch, wenn L durch $\mathcal{L}$ ersetzt wird.

Beweis:

Die Funktion $\mathcal{L}$ hat einen verallgemeinerten Sattelpunkt bezüglich $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ genau dann, wenn u_0 eine Lösung von

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(x_0, u) \longrightarrow \mathrm{Min}\,, \\ & u \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

und x_0 eine Lösung von

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(x, u_0) \longrightarrow \mathrm{Max}\,, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ist. Das zweite Problem ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}(x,u_0))^T \longrightarrow \mathrm{Min}\,, \\
&x \geq 0
\end{aligned} \tag{3.4.8}
$$

Die Probleme (3.4.7) bzw. (3.4.8) sind bis auf die konstanten Glieder in den Zielfunktionen identisch mit (3.4.2) bzw. (3.4.4). Die Aussage, daß u_0 (3.4.2) löst und x_0 (3.4.4) löst, ist äquivalent mit der Behauptung, daß (x_0, u_0) ein verallgemeinerter Sattelpunkt von L bezüglich $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ ist.$ $\square$

<u>BEMERKUNG 3.6:</u>

In RÖDDER (1977) findet man folgende Behauptung (Corollary 3.3):

Wenn (x_0, u_0) ein verallgemeinerter Sattelpunkt von $\mathcal{L}$ bezüglich $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ ist, so gilt $(Cx_0)^T \not\geq u_0^T B$.

Wir betrachten folgendes Beispiel. Sei

$$\mathcal{L}(x,y) = (Cx)^T + u^T(B - (Ax, \ldots, Ax)).$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $((1,2)^T, (2,1)^T)$ ein verallgemeinerter Sattelpunkt von $\mathcal{L}$ bezüglich $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ ist . Wir haben aber trotzdem

$$(Cx_0)^T = (8, \frac{8}{3}) \geq (8, 0) = u_0^T B!$$

4 Dualität in der nichtlinearen Vektoroptimierung

4.1 Konjugierte von Punkt-Menge-Abbildungen

Einen Zugang zur Dualität der nichtlinearen Optimierung bieten die konjugierten Funktionen nach FENCHEL und deren Verallgemeinerungen. Diese Methode kann in verschiedener Weise auch in der Vektoroptimierung angewandt werden. Einerseits kann man durch Skalarisierung und anschließender Konjugation zu Dualproblemen gelangen, andererseits können konjugierte Abbildungen von Vektorfunktionen bzw. Punkt-Menge-Abbildungen verwendet werden.

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Die konjugierte Funktion $f^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ von f wird wie folgt erklärt (vgl. ROCKAFELLAR (1970))

$$f^*(x^*) = \sup_x \{x^{*T} x - f(x)\}, \quad x^* \in \mathbb{R}^n.$$

In TANINO/SAWARAGI (1980) wird diese Definition auf vektorwertige Funktionen und Punkt-Menge-Abbildungen übertragen.

<u>DEFINITION 4.1:</u>

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T : U \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$. Die konjugierte Abbildung von T wird durch

$$T^*(u^*) := \mathrm{Max} \bigcup_{u \in U} [\langle\langle u^*, u \rangle\rangle - T(u)]$$

bestimmt, wobei $\langle\!\langle u^*, u \rangle\!\rangle$ einen Vektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, dessen sämtliche Komponenten gleich $u^{*T}u$ sind.

Es erscheint uns sinnvoll, diese Definition folgendermaßen zu modifizieren.

DEFINITION 4.2:

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T : U \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$. Die konjugierte Abbildung $T^c : \mathbb{R}^{k\times n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ von T wird durch

$$T^c(L) := \operatorname{Max} \bigcup_{u\in U} [Lu - T(u)], \quad L \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

definiert. Die Bikonjugierte von T ist entsprechend durch

$$T^{cc}(u) := \operatorname{Max} \bigcup_{L\in \mathbb{R}^{k\times n}} [Lu - T^c(L)], \quad u \in U,$$

gegeben.

BEMERKUNG 4.1:

Es ist bekannt, daß bei Benutzung der FENCHEL-Konjugierten unter gewissen Voraussetzungen die Dualvariablen x^* Subgradienten von f oder (im Falle der Differenzierbarkeit) Gradienten von f sind. Somit ist es durchaus natürlich, bei einer Vektorfunktion Matrizen als Dualvariable zu verwenden.

Folgendes Lemma erweist sich als nützlich:

LEMMA 4.1:

Seien T_1 und T_2 Punkt-Menge-Abbildungen von U in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$. $T_2(u)$ sei $\mathbb{R}^k_-$-kompakt[1] für alle $u \in U$. Dann gilt

$$\operatorname{Max} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + T_2(u)] = \operatorname{Max} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + \operatorname{Max} T_2(u)].$$

Ist $T_2(u)$ R^k_+-kompakt für alle $u \in U$ so gilt

$$\operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + T_2(u)] = \operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + \operatorname{Min} T_2(u)].$$

Beweis:

Nach KOROLLAR 2.1 gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + T_2(u)] &= \operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + T_2(u) + \mathbb{R}^k_+] \\ &= \operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + (T_2(u) + \mathbb{R}^k_+)]\end{aligned}$$

[1] vgl. DEFINITON 2.2

$$= \operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + (\operatorname{Min} T_2(u) + \mathbb{R}^k_+)]$$

$$= \operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [(T_1(u) + \operatorname{Min} T_2(u)) + \mathbb{R}^k_+]$$

$$= \operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} [T_1(u) + \operatorname{Min} T_2(u)].$$

Die zweite Behauptung ergibt sich aus der soeben bewiesenen unter Berücksichtigung von $\operatorname{Max} A = -\operatorname{Min}(-A)$. $\square$.

BEMERKUNG 4.2:

In TANINO/SAWARAGI (1980) wurde ein anderer Begriff der $\mathbb{R}^k_+$-Kompaktheit benutzt, welcher eine stärkere Forderung an T stellt.

DEFINITION 4.3:

Sei $u \in U$ und $z \in T(u)$. $L \in \mathbb{R}^{k\times n}$ heißt Subgradient für z an der Stelle u, falls

$$z - Lu \in \operatorname{Min} \bigcup_{w\in U} [T(w) - Lw].$$

Die Menge der Subgradienten für z an der Stelle u heißt das Subdifferential für z an der Stelle u und wird mit $\partial T(u; z)$ bezeichnet. T heißt subdifferenzierbar an der Stelle u, falls gilt:

$$\partial T(u; z) \neq \emptyset \qquad \forall z \in T(u).$$

SATZ 4.1:

Sei $z \in T(\bar{u})$. Dann gilt:

$$z \in \operatorname{Min} \bigcup_{u\in U} T(u) \Longleftrightarrow 0 \in \partial T(\bar{u}; z).$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Definition.$\square$

SATZ 4.2:

Sei $z \in T(u)$. Es gilt:

$$\partial T(u; z) \neq \emptyset \Longleftrightarrow z \in T^{cc}(u).$$

Beweis:

Es ist nach Definition $\partial T(u; z) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $Lu - z \in T^c(L)$, d.h. wenn $z \in Lu - T^c(L)$.

Sei $z \in T^{cc}(u)$. Dann existiert ein $L \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mit $z \in Lu - T^c(L)$. Mithin gilt $L \in \partial T(u; z)$.

Sei nun $z \in Lu - T^c(L)$, und angenommen, es ist $z \notin T^{cc}(u)$. Dann existieren z' und L' mit

$$z' \succ z \quad \text{und} \quad z' \in L'u - T^c(L').$$

Somit ist

$$L'u - z' \in T^c(L'),$$

und es gibt ein u' mit

$$L'u - z' \in L'u' - T(u').$$

Daraus folgt

$$L'u - z' = L'u' - z'' \quad \text{für ein} \quad z'' \in T(u')$$

und somit $L'u' - z'' \in T^c(L')$.

Wegen $z' \succ z$ gilt aber im Widerspruch dazu

$$L'u - z \succ L'u - z' = L'u' - z''.$$

Es muß folglich $z \in T^{cc}(u)$ gelten. $\square$

KOROLLAR 4.1:

Ist T subdifferenzierbar in u, so gilt $T(u) \subseteq T^{cc}(u)$.

SATZ 4.3: Seien $z \in T(u)$, $v \in \bigcup_{L \in \mathbb{R}^{k \times n}} (Lu - T^c(L))$. Dann gilt $z \not\prec v$.

Beweis:

Angenommen, es gilt $z \prec v$. Es ist $v \in Lu - T^c(L)$ für ein $L \in \mathbb{R}^{k \times n}$, und es existiert somit ein $z' \in T^c(L)$ mit

$$v = Lu - z', \quad \text{d.h} \quad z' = Lu - v.$$

Aus $Lu - v \in T^c(L)$ folgt die Existenz von $w \in U$ und $v' \in T(w)$ mit

$$Lu - v = Lw - v'.$$

Mithin ist

$$z \prec Lu - Lw + v',$$

also

$$Lw - v' \prec Lu - z,$$

Dies widerspricht der Tatsache, daß

$$Lw - v' = Lu - v \in T^c(L)$$

gilt. Somit muß $z \not\prec v$ gelten.$\square$

BEMERKUNG 4.3:

SATZ 4.3 ist in TANINO/SAWARAGI (1980) nur für den Fall, daß T eine Vektorfunktion ist, bewiesen.

4.2 Das Konzept der Störung in der Vektoroptimierung

Man kann Dualprobleme zu einem Vektoroptimierungsproblem nach dem bekannten Schema von JOLY/LAURENT (vgl. z.B. LAURENT (1975)) gewinnen, indem man die gewöhnliche FENCHEL-Konjugation und die Methode der Skalarisierung verwendet oder die verallgemeinerten Konjugierten zu Hilfe nimmt.

Wir betrachten das Vektoroptimierungsproblem

$$(P) \qquad \begin{array}{l} f(x) \longrightarrow \text{Min}\,, \\ x \in G, \end{array}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ und $G \in \mathbb{R}^n$ konvex seien.

Wir betten (P) in eine Familie von "gestörten" Problemen ein:

$$(P_u) \qquad \begin{array}{l} F(x,u) \longrightarrow \text{Min}\,, \\ x \in G_u, \end{array}$$

mit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, wobei $F(x,0) = f(x)$ für $x \in G_0 = G$ gilt. F sei auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ konvex. Wir setzen

$$F_{t^*}(x,u) = t^{*T} F(x,u)$$

und betrachten das Problem

$$(D_8) \qquad \begin{array}{l} h \longrightarrow \text{Max}\,, \\ h \in D_8 = \{h \in \mathbb{R}^k \,|\, \exists t^* \in K^{\#}, u^* \in \mathbb{R}^m : t^{*T} h \leq -F^*_{t^*}(0,-u^*)\} \end{array}$$

wobei $K^{\#} := \{y^* \in \mathbb{R}^k \,|\quad y^{*T} y > 0 \quad \forall t \in K \backslash \{0\}\}$. ($K$ ist der Ordnungskegel des $\mathbb{R}^k$) sein möge und $F^*_{t^*}$ die FENCHEL-Konjugierte von F_{t^*} bezeichne. Dieses Konzept wurde bereits von LAMPE (1981) in einer etwas anderen Formulierung benutzt. Bei der von uns gewählten Formulierung des Dualproblems gelingt es, den starken inversen Dualitätssatz unter schwächeren Voraussetzungen als in der genannten Arbeit zu beweisen.

LEMMA 4.1:

Sei $h \in D_8$. Es existiert ein $t^* \in K^{\#}$ mit

$$t^{*T} h \leq t^{*T} f(x) \quad \forall x \in G$$

Beweis:

Aus $h \in D^8$ folgt die Existenz von gewissen $t^* \in K^{\#}$ und $u^* \in \mathbb{R}^m$ mit

$$t^{*T} h \leq -F^*_{t^*}(0,-u^*).$$

Daraus folgt durch elementare Rechnung

$$t^{*T} h \leq -F^*_{t^*}(0,-u^*) \leq \sup{}_w[-F^*_{t^*}(0,-w)] \leq \inf{}_v F_{t^*}(v,0) \leq t^{*T} f(x) \quad \forall x \in G.\square$$

SATZ 4.4: (Schwacher Dualitätssatz)

Es gilt $h \not\succ f(x)\ \forall h \in D_8, \quad \forall x \in G$.

Beweis:

Die Annahme $h \succ f(x)$ führt auf

$$t^{*T} h > t^{*T} f(x) \quad \forall t^* \in K^{\#},$$

was nach LEMMA 4.1 unmöglich ist. $\square$

SATZ 4.5: (Starker direkter Dualitätssatz)

Sei $f(x_0) \in \text{Min}_E P$. Das Optimierungsproblem

$$F_{t^*}(x,0) \longrightarrow \min\,, \quad x \in G,$$

sei stabil[2] . Dann gilt $f(x_0) \in \operatorname{Max} D_8$.

Beweis:

Es gilt für ein $u^* \in \mathbb{R}^m$

$$
\begin{aligned}
t^{*T} f(x_0) &= \inf{}_{x \in \mathbb{R}^n} F_{t^*}(x,0) \\
&= \max{}_{w \in \mathbb{R}^m}(-F^*_{t^*}(0,-w)) = -F^*_{t^*}(0,-u^*).
\end{aligned}
$$

Somit ist $f(x_0) \in D_8$, und die Behauptung folgt aus SATZ 4.4 □

SATZ 4.6: (Starker inverser Dualitätssatz)

Sei P nichtleer und abgeschlossen. Das Problem

$$F_{t^*}(x,0) \longrightarrow \min\,, \quad x \in G,$$

sei normal[3] für alle $t^* \in K^{\#}$. Dann gilt $\operatorname{Max} D_8 \subseteq \operatorname{Min}{}_E P$:

Beweis:

Angenommen,es gibt ein $h \in \operatorname{Max} D_8$ mit $h \notin P$. Nach dem Satz über die strenge Trennbarkeit (SATZ 2.6) existieren $\bar{t} \neq 0$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\bar{t}^T h < \alpha_1 < \alpha_2 < \bar{t}^T (f(x) + k) \quad \forall x \in G, \quad \forall k \in K.$$

Daraus folgt $\bar{t} \in K^* \backslash \{0\}$. Nach LEMMA 4.1 existiert ein $\tilde{t} \in K^{\#}$ mit

$$\tilde{t}^T h \leq \tilde{t}^T p \qquad \forall p \in P.$$

Sei $t_\lambda = \lambda \tilde{t} + (1-\lambda)\bar{t}$ mit $\lambda \in (0,1)$. Dann ist $t_\lambda \in K^{\#}$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
t_\lambda^T h &< \lambda \tilde{t}^T h + (1-\lambda)\lambda_1 \\
&\leq \lambda \inf{}_{p \in P} \tilde{t}^T p + (1-\lambda)\lambda_1 \\
&< \inf{}_{p \in P} \lambda \tilde{t}^T p + \inf{}_{p \in P} (1-\lambda)\bar{t}^T p \\
&\leq \inf{}_{p \in P} t_\lambda^T p = \inf{}_{x \in G} t_\lambda^T f(x) = \inf{}_{x \in \mathbb{R}^n} F_{t_\lambda}(x,0).
\end{aligned}
$$

Aus der Normalität folgt

$$t_\lambda^T h < \sup{}_{w \in \mathbb{R}^m} (-F^*_{t_\lambda}(0,-w)),$$

und somit gibt es ein $u^* \in \mathbb{R}^m$ mit

$$t_\lambda^T h < -F^*_{t_\lambda}(0,-u^*).$$

Sei $\bar{h} \succ h$ und sei $h_\mu = \mu \bar{h} + (1-\mu)h$, $\mu \in (0,1)$. Dann ist $h_\mu \succ h$, und für genügend kleines $\mu > 0$ gilt

$$t_\lambda^T h_\mu \leq -F^*_{t_\lambda}(0,-u^*),$$

d.h. $h_\mu \in D_8$. Das ist ein Widerspruch zu $h \in \operatorname{Max} D_8$. Somit gilt $h \in P$ und LEMMA 4.1 liefert $h \in \operatorname{Min}_{\mathrm{E}} P$.□

Wir betrachten jetzt die sog. Standardstörung. Sei $G = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g(x) \leq 0\}$, wobei $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ konvex sein möge und $\mathbb{R}^m$ durch $\mathbb{R}^m_+$ halbgeordnet sei.

Mit

$$F_{t^*}(x,u) = \begin{cases} t^{*T} f(x), & \text{falls } g(x) \leq u, \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

[2] d.h.

$$\inf{}_{x \in \mathbb{R}^n} F_{t^*}(x,0) = \max{}_{w \in \mathbb{R}^m}(-F^*_{t^*}(0,-w))$$

[3] d.h.

$$\inf{}_{x \in \mathbb{R}^n} F_{t^*}(x,0) = \sup{}_{w \in \mathbb{R}^m}(-F^*_{t^*}(0,-w))$$

(vgl. z.B. EKELAND/TEMAM (1976))

erhalten wir

$$-F^*_{t^*}(0,-u^*) = -\sup{}_{(x,u)}(-u^{*T}u - F_{t^*}(x,u))$$

$$= \inf{}_{(x,u)}(F_{t^*}(x,u) + u^{*T}u)$$

$$= \inf{}_{x\in\mathbb{R}^n} \inf{}_{u\geq g(x)}(F_{t^*}(x,u) + u^{*T}u)$$

$$= \begin{cases} \inf{}_{x\in\mathbb{R}^n}(t^{*T}f(x) + u^{*T}g(x)) & \text{falls } u^* \geq 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit ergibt sich

$$D_8 = \{h \in \mathbb{R}^k \mid \exists t^* \in K^\#, \exists u^* \in \mathbb{R}^m : t^{*T}h \leq \inf{}_x(t^{*T}f(x) + u^{*T}g(x))\}.$$

Also enthält (D_8) als Sonderfall die Dualaufgabe von JAHN (1983a), und im Falle, daß f und g differenzierbar sind, entspricht diese der Dualaufgabe von SCHÖNFELD (1970).

Es sei noch bemerkt, daß die Beweise der Sätze 4.4, 4.5 und 4.6 nicht an die endliche Dimension der Räume gebunden sind und bleiben auch in lokal konvexen topologischen Vektorräumen gültig.

Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Wir führen folgende Punkt-Menge-Abbildungen ein:

$$W(\xi) := \{f(x) \mid g(x) \leq \xi\},$$
$$H(\xi) := \operatorname{Min}\{f(x) \mid g(x) \leq \xi\}.$$

In Analogie zur nichtlinearen Optimierung wollen wir H die Empfindlichkeitsabbildung nennen.

Sei epi W der Epigraph von $W(\xi)$, d.h.

$$\operatorname{epi} W := \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : \xi \geq g(x), \eta \geq f(x)\}.$$

Wir betrachten das gestörte Problem

$$(P_\xi) \qquad \begin{array}{l} p \longrightarrow \operatorname{Min}, \\ p \in W(\xi) + \mathbb{R}^k_+ \, . \end{array}$$

Es gilt offenbar $H(\xi) = \operatorname{Min} P_\xi$ und insbesondere $H(0) = \operatorname{Min} P$. Sei $\Gamma = \{L \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \mid H^c(-L) \neq \emptyset\}$. Wie in der nichtlinearen Optimierung definieren wir das duale Problem

$$(D_9) \qquad \begin{array}{l} d \longrightarrow \operatorname{Max}, \\ d \in \bigcup_{L\in\Gamma}(-H^c(-L)) - \mathbb{R}^k_+. \end{array}$$

Es gilt dann offenbar $\mathrm{Max}\, D_9 = H^{cc}(0)$.

Es ist leicht zu verifizieren, daß

$$H(\xi) = \mathrm{Min}\,\{\eta \,|\, (\xi,\eta) \in \mathrm{epi}\, W\}.$$

Sei $Pr_2(\mathrm{epi}\, W) = \{\xi \,|\, \exists \eta : (\xi,\eta) \in \mathrm{epi}\, W\}$ und sei $\mathrm{epi}\, W$ abgeschlossen. Unter Berücksichtigung von SATZ 2.4 und KOROLLAR 2.1 erhalten wir

$$-H^c(-L) = -\mathrm{Max} \bigcup_{\xi \in Pr_2(\mathrm{epi}\, W)} [-L\xi - H(\xi)] = \mathrm{Min} \bigcup_{\xi \in Pr_2(\mathrm{epi}\, W)} [L\xi + H(\xi)]$$

$$= \mathrm{Min} \bigcup_{\xi \in Pr_2(\mathrm{epi}\, W)} [L\xi + \mathrm{Min}\,\{\eta \,|\, (\xi,\eta) \in \mathrm{epi}\, W\}] = \mathrm{Min} \bigcup_{\xi \in Pr_2(\mathrm{epi}\, W)} [L\xi + \mathrm{Min}\,\{\eta \,|\, (\xi,\eta) \in \mathrm{epi}\, W\} + \mathbb{R}^k_+]$$

$$= \mathrm{Min} \bigcup_{\xi \in Pr_2(\mathrm{epi}\, W)} [L\xi + \{\eta \,|\, (\xi,\eta) \in \mathrm{epi}\, W\}] = \mathrm{Min} \bigcup_{\xi \in Pr_2(\mathrm{epi}\, W)} [L\xi + \eta].$$

Dieses Problem findet man bereits bei BITRAN (1981), allerdings nicht im Zusammenhang mit Konjugierten von Punkt-Menge-Abbildungen.

Aus SATZ 4.3 folgt die schwache Dualitätsbeztiehung und KOROLLAR 4.1 liefert einen starken Dualitätssatz.

4.3 Das Dualproblem von BITRAN

Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ auf $\mathbb{R}^n$ konvex und differenzierbar.

In BITRAN (1981) wird folgendes Dualproblem zu (P) eingeführt:

$$(D_{10}) \qquad \begin{array}{l} h \longrightarrow \mathrm{Max}\,, \\ h \in \bigcup_{L \in \mathcal{L}} D(L), \\ D(L) = \mathrm{Min}\,\{\eta + L\xi \,|\, (\xi,\eta) \in \mathrm{epi}\, W\}, \\ \mathcal{L} = \{L \in \mathbb{R}^{k \times m} \,|\, \exists z \in \mathrm{int}\, \mathbb{R}^k_+ : z^T L \geq 0\}. \end{array}$$

Das Hauptergebnis aus BITRAN (1981) kann wie folgt zusammengefaßt werden:

SATZ 4.7:(schwacher Dualitätssatz)

Seien $L \in \mathcal{L}$ und $x \in G$. Dann gilt

$$f(x) \not< h \quad \text{für alle} \quad h \in D(L).$$

SATZ 4.8:(starker Dualitätssatz)

Sei $x_0 \in G$ derart, daß gilt

$$\triangledown f(x_0)x_0 \in \mathrm{Min}\,\{\triangledown f(x_0)x \,|\, \triangledown g_I(x_0)(x - x_0) \leq 0\},$$

wobei $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ die Indexmenge der in x_0 aktiven Restriktionen bezeichnet. Dann gilt:

$$f(x_0) \in \text{Min}\, P \cap \text{Max}\, D_{10}.$$

Wir wollen nun zwei weitere starke Dualitätsaussagen der Form

$$\text{Min}_E P \subseteq \text{Max}\, D_{10} \quad \text{und} \quad \text{Min}_P \supseteq \text{Max}\, D_{10}$$

beweisen.

Dazu benötigen wir folgendes Lemma

LEMMA 4.2:

(i) Sei $x_0 \in G$ derart, daß

$$\bigtriangledown f(x_0)x_0 \in \text{Min}\, \{\bigtriangledown f(x_0)x \mid \bigtriangledown g_I(x_0)(x - x_0) \leq 0\}$$

Dann gilt $f(x_0) \in \text{Min}_E P$.

(ii) Sei für G eine Regularitätsbedingung erfüllt, z.B. $K^*(G, x_0) = T^*(G, x_0)$, wobei K^* und T^* die Dualkegel des linearisierenden Kegels bzw. Tangentenkegels von G in x_0 bezeichnen (vgl. BAZARAA/SHETTY (1976)). Ist $f(x_0) \in \text{Min}_E P$, so gilt

$$\bigtriangledown f(x_0)x_0 \in \text{Min}\, \{\bigtriangledown f(x_0)x \mid \bigtriangledown g_I(x_0)(x - x_0) \leq 0\}$$

Beweis:

(i) Wir betrachten das zu

$$(LAP) \qquad \begin{array}{l} \bigtriangledown f(x_0)x \longrightarrow \text{Min}\,, \\ \bigtriangledown g_I(x_0)(x - x_0) \leq 0 \end{array}$$

nach GALE/KUHN/TUCKER duale Problem (vgl. BEMERKUNG 3.5):

$$(DLAP) \quad \begin{array}{l} h \longrightarrow \text{Max}\,, \\ z^T h = -y^T \bigtriangledown g_I(x_0)x_0, \\ z^T \bigtriangledown f(x_0) + y^T \bigtriangledown g_I(x_0) = 0, \\ z > 0, \quad y \geq 0. \end{array}$$

Nach SATZ 3.1 löst $h_0 = \bigtriangledown f(x_0)x_0 \quad (DLAP)$, und es gibt somit $z > 0$, $y_I \geq 0$ derart, daß gilt

$$\begin{array}{c} z^T \bigtriangledown f(x_0)x_0 = -y_I^T \bigtriangledown g_I(x_0)x_0, \\ z^T \bigtriangledown f(x_0) + y_I^T \bigtriangledown g_I(x_0) = 0. \end{array}$$

Setzen wir die den nicht aktiven Restriktionen entsprechenden Multiplikatoren gleich Null, so erhalten wir

$$\begin{array}{c} z^T \bigtriangledown f(x_0) + y_I^T \bigtriangledown g_I(x_0) = 0, \\ y^T g(x_0) = 0, \qquad y \geq 0. \end{array}$$

Mithin genügt x_0 den hinreichenden KUHN-TUCKER-Bedingungen für das Problem

$$z^T f(x) \longrightarrow \min\,,$$
$$x \in G;$$

daher ist $f(x_0) \in \mathrm{Min_E}\, P$.

(ii) Sei $f(x_0) \in \mathrm{Min_E}\, P$. Dann existiert ein $\bar{z} > 0$ mit

$$\bar{z}^T f(x_0) = \min{}_{x \in G} \bar{z}^T f(x)$$

Nach dem Satz von KUHN-TUCKER existiert ein $\bar{y} \geq 0$ mit

$$\bar{z}^T \bigtriangledown f(x_0) + \bar{y}_I^T \bigtriangledown g_I(x_0) = 0.$$
$$\bar{y}^T g(x_0) = 0.$$

Somit besitzt $(DLAP)$ zulässige Elemente. Andererseits ist x_0 zulässig für (LAP). Nach SATZ 3.1 besitzen beide Probleme effiziente Lösungen. Angenommen, $\bigtriangledown f(x_0)\bar{x} \succ \bigtriangledown f(x_0)x_0$ und $\bigtriangledown f(x_0)\bar{x}$ ist effizient für (LAP). Nach SATZ 3.1 ist $\bigtriangledown f(x_0)\bar{x}$ effizient für $(DLAP)$ und somit existieren $z > 0$ und $y \geq 0$ mit

$$z^T \bigtriangledown f(x_0)\bar{x} = -y^T \bigtriangledown g_I(x_0)x_0.$$
$$z^T \bigtriangledown f(x_0) + y^T \bigtriangledown g_I(x_0) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung und der Annahme folgt im Widerspruch zur zweiten Gleichung

$$-y^T \bigtriangledown g_I(x_0)x_0 = z^T \bigtriangledown f(x_0)\bar{x} > z^T \bigtriangledown f(x_0)x_0. \quad \Box.$$

Somit kann die Aussage von SATZ 4.8 etwas schärfer formuliert werden, denn unter den dort getroffenen Voraussetzungen folgt mit LEMMA 4.2 (i)

$$f(x_0) \in \mathrm{Min}\,{}_E P \cap \mathrm{Max}\, D_{10}.$$

<u>SATZ 4.9:</u> (Starker direkter Dualitätssatz)

Sei für G eine Regularitätsbedingung (vgl. LEMMA 4.2 (ii)) erfüllt. Dann gilt $\mathrm{Min}\,{}_E P \subseteq \mathrm{Max}\, D_{10}$.

<u>Beweis:</u>

Sei $f(x_0) \in \mathrm{Min}_E P$. Nach LEMMA 4.3 (ii) und SATZ 4.8 folgt $f(x_0) \in \mathrm{Min}\, P \cap \mathrm{Max}\, D_{10}$. $\Box$

Wir wollen nun einen inversen Dualitätssatz beweisen, wozu wir folgendes Lemma benötigen:

<u>LEMMA 4.3:</u>

Sei für $\quad L \in \mathbb{R}^{k \times m}$

$$H(L) = \{f(x) + Lg(x) \,|\, \exists z > 0 : z^T(\bigtriangledown f(x) + L \bigtriangledown g(x)) = 0, z^T L \geq 0\}.$$

Dann gilt $H(L) \subseteq D(L)$.

<u>Beweis:</u>

Sei $f(\tilde{x}) + Lg(\tilde{x}) \in H(L)$. Es ist $f(\tilde{x}) + Lg(\tilde{x}) \in \{\eta + L\xi \,|\, (\xi, \eta) \in \mathrm{epi}\, W\}$.

Angenommen, es gibt ein $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \operatorname{epi} W$ mit

$$\bar{\eta} + L\bar{\xi} \in f(\tilde{x}) + Lg(\tilde{x}).$$

Wegen $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \operatorname{epi} W$ existiert ein $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\bar{\eta} \geq F(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \bar{\xi} \geq g(\bar{x}).$$

Wegen $z^T L \geq 0$ folgt dann

$$z^T(f(\bar{x}) + Lg(\bar{x})) \leq z^T(\bar{\eta} + L\bar{\xi}) < z^T(f(\tilde{x}) + Lg(\tilde{x})).$$

Aus der Konvexität von f und g folgt im Widerspruch dazu

$$z^T(f(\bar{x}) + Lg(\bar{x})) - z^T(f(\tilde{x}) + Lg(\tilde{x})) \geq z^T(\bigtriangledown f(\tilde{x}) + L \bigtriangledown g(\tilde{x}))(\bar{x} - \tilde{x}) = 0.$$

Somit gilt $f(\tilde{x}) + Lg(\tilde{x}) \in D(L)$. $\square$

SATZ 4.10: Sei P abgeschlossen mit $\operatorname{Min} P \neq \emptyset$. Für G gelte eine Regularitätsbedingung (vgl. LEMMA 4.2 (ii)) und es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\operatorname{Max} D_{10} \subseteq \operatorname{Min} P.$$

Beweis:

Sei $h \in \operatorname{Max} D_{10}$. Ist $h \in P$, so folgt die Behauptung aus SATZ 4.7.

Sei $h \notin P$. Dann existieren (vgl. SATZ 2.6) $z \neq 0, \gamma_1, \gamma_2 \in R$ mit

$$z^T h < \gamma_1 < \gamma_2 < z^T(f(x) + k) \quad \forall x \in G, \quad \forall k \in \mathbb{R}^k_+. \tag{4.3.1}$$

Die Annahme $z_i < 0$ führt sofort zum Widerspruch, da k_i beliebig groß werden kann, daher ist $z \succ 0$. Aus $\operatorname{Min} P \neq \emptyset$ folgt $\operatorname{Min}_E P \neq \emptyset$ (vgl. SATZ 2.4) und somit gilt für ein $z_0 > 0$ und ein $p_0 \in P$

$$z_0^T p_0 \leq z_0^T p \qquad \forall p \in P, \tag{4.3.2}$$

Setzen wir $z_\mu = \mu z_0 + (1-\mu)z$ für $\mu \in (0,1)$, so gilt $z_\mu > 0$, und (4.3.1) und (4.3.2) ergeben leicht

$$z_\mu^T p = \mu z_0^T p + (1-\mu)z^T p > \mu z_0^T p + (1-\mu)\gamma_2 \geq \gamma_2 + \mu(z_0^T p_0 - \gamma_2) \quad \forall p \in P.$$

Somit gilt für genügend kleines $\mu > 0$

$$z_\mu^T h = z^T h + \mu(z_0^T h - z^T h) < \gamma_1 < \gamma_2 + \mu(z_0^T p_0 - \gamma_2) < z_\mu^T p \quad \forall p \in P.$$

Daraus folgt mit $\gamma_2' = \gamma_2 + \mu(z_0^T p_0 - \gamma_2)$

$$z_\mu^T < \gamma_1 < \gamma_2' \leq \inf{}_{p \in P} z_\mu^T p = -\delta^*(-z_\mu, P). \tag{4.3.3}$$

Daraus folgt insbesondere

$$-z_\mu \in \operatorname{dom} \delta^*.$$

Wegen der Konvexität von $\operatorname{dom} \delta^*$ gilt $r.\mathrm{int}\, \operatorname{dom} \delta^* \neq \emptyset$.

Sei $-z_1 \in r.\mathrm{int}\, \operatorname{dom} \delta^*$. Dann existiert ein $p_1 \in P$ (vgl. ROCKAFELLAR (1970) Satz 23.4 und Korollar 23.5) mit

$$z_1^T p_1 \leq z_1^T p \quad \forall p \in P. \tag{4.3.4}$$

Setzen wir $z_\epsilon = \epsilon z_1 + (1-\epsilon) z_\mu$ für $\epsilon \in (0,1)$, so ergeben sich leicht $z_\epsilon > 0, -z_\epsilon \in r.\mathrm{int}\, \operatorname{dom} \delta^*$, und (wie bei der Herleitung von (4.3.3)) für genügend kleine $\epsilon > 0$

$$z_\epsilon^T h \in -\delta^*(-z_\epsilon, P).$$

Es gilt (vgl. Referenz bei (4.3.4))

$$-\delta^*(-z_\epsilon, P) = z_\epsilon^T \bar{p} \qquad \text{für ein} \quad \bar{p} \in P.$$

Nach dem direkten Dualitätssatz für modifizierte WOLFE-duale Probleme (vgl. SATZ 4.12) gilt:

$$\bar{p} = f(\bar{x}) + \bar{L}g(\bar{x}), \quad \bar{L}g(\bar{x}) = 0$$
$$z_\epsilon^T(\bigtriangledown f(\bar{x}) + \bar{L} \bigtriangledown g(\bar{x})) = 0^T, \quad z_\epsilon^T \bar{L} \geq 0^T$$

mit $\bar{x} \in G, \quad \bar{L} \in \mathbb{R}^{k \times m}$.

Es ergibt sich somit

$$h \in \operatorname{int} \bigcup_L S(L),$$

wobei

$$S(L) = \{d \in \mathbb{R}^k \mid z^T d \leq z^T(f(x) + Lg(x)), \quad z^T L \geq 0^T,$$
$$z^T(\bigtriangledown f(x) + L \bigtriangledown g(x)) = 0^T, x \in \mathbb{R}^n, z > 0\}.$$

Es gilt $S(L) = T(L) - \mathbb{R}^k_+$ mit

$$T(L) = \{d \in \mathbb{R}^k \mid z^T d = z^T(f(x) + Lg(x)), \quad z^T L \geq 0^T,$$
$$z^T(\bigtriangledown f(x) + L \bigtriangledown g(x)) = 0^T, x \in \mathbb{R}^n, z > 0\}.$$

Sei $s \in \bigcup_L (T(L)$, d.h.

$$\tilde{z}^T s = \tilde{z}^T(f(\tilde{x}) + \tilde{L}g(\tilde{x}))$$

für geeignete $\tilde{L}, \tilde{x}$ und $\tilde{z}$. Wegen $\tilde{z} > 0$ und $g(\tilde{x}) \neq 0$ existiert ein $\hat{L}$ (vgl. KOROLLAR 3.1) mit

$$\tilde{z}^T \hat{L} = \tilde{z}^T \tilde{L}$$

und

$$f(\tilde{x}) + \hat{L}(\tilde{x}) = s.$$

Somit ist $s \in H(\hat{L})$. Es gilt also nach LEMMA 4.3

$$\bigcup_L T(L) \subseteq \bigcup_L H(L) \subseteq \bigcup_L D(L)$$

und mithin

$$\bigcup_L S(L) \subseteq \bigcup_L D(L) - \mathbb{R}^k_+.$$

Daraus ergibt sich

$$h \in \operatorname{int} (\bigcup_L D(L) - \mathbb{R}^k_+)$$

im Widerspruch zu $h \in \operatorname{Max} D_{10}$. Somit ist $h \in P$ und SATZ 4.7 liefert leicht $h \in \operatorname{Min} P$.□

4.4 Das Dualproblem von WOLFE-Typ

Dieses Dualproblem stammt aus NEHSE (1981). Dort wird ein starker Dualitätssatz bewiesen.

Der in GERSTEWITZ (1982) enthaltene inverse Dualitätssatz ist nicht korrekt bewiesen.

Wir schlagen eine modifizierte Variante des WOLFE-dualen Problems vor, für welche wir einen direkten sowie einen inversen starken Dualitätssatzbeweisen.

Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ auf $\mathbb{R}^n$ konvex und differenzierbar.

$$(P) \qquad \begin{array}{l} f(x) \longrightarrow \text{Min}\,, \\ x \in G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}, \end{array}$$

Mittels der LAGRANGE-Funktion

$$F(x, L) := f(x) + Lg(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, L \in \mathbb{R}^{k \times m}$$

formulieren wir als modifizierte WOLFE-duale Aufgabe

$$(D_{11}) \qquad \begin{array}{l} F(y, L) \longrightarrow \text{Max}\,, \\ (y, L) \in G^*, \quad G^* := \bigcup_{z>0} D_z, \end{array}$$

wobei $D_z := \{(y, L) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k \times m} \mid z^T L \geq 0, z^T \bigtriangledown_y F(y, L) = 0\}$.

Damit ist $D_{11} = F(G^*) - \mathbb{R}^k_+$.

LEMMA 4.4:

Wenn $h \in D_{11}$ ist, dann existiert ein $z > 0$ mit $z^T h \leq z^T f(x) \quad \forall x \in G$.

Beweis:

Wegen $h = F(y, L) - h'$ mit $h' \in \mathbb{R}^k_+$ und $(y, L) \in G^*$ existiert ein $z > 0$, so daß aus der Konvexität von $F(\cdot, L)$ auf $\mathbb{R}^n$

$$z^T[F(x, L) - F(y, L)] \geq z^T \bigtriangledown_y F(y, L)(x - y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

folgt. Somit ergibt sich wegen $z^T L \geq 0$ für alle $x \in G$

$$z^T f(x) \geq z^T(f(x) + Lg(x)) \geq z^T F(y, L) \geq z^T h. \quad \Box$$

SATZ 4.11: (Schwacher Dualitätssatz)

Es gilt für alle $x \in G$ und $(y, L) \in G^*$

$$F(y, L) \not\succ f(x).$$

Beweis:

Die Annahme, daß für gewisse $x \in G$ und $(y, L) \in G^*$

$$F(y, L) \succ f(x)$$

gilt führt für jedes $z > 0$ auf

$$z^T F(y, L) > z^T f(x),$$

was nach LEMMA 4.4 unmöglich ist. □

SATZ 4.12: (Starker direkter Dualitätssatz) Es sei für G eine Regularitätsbedingung (vgl. LEMMA 4.2 (ii)) erfüllt. Ist $f(x_0) \in \operatorname{Min}_E P$, dann existiert ein $L_0 \in \mathbb{R}^{k \times m}$, so daß gilt

$$f(x_0) = F(x_0, L_0) \in \operatorname{Max} D_{11}.$$

Beweis:

Wegen $f(x_0) \in \operatorname{Min}_E P$ existiert ein $z > 0$ mit

$$z^T f(x_0) \leq z^T f(x) \quad \forall x \in G.$$

Gemäß den KUHN-TUCKER-Bedingungen für

$$z^T f(x) \longrightarrow \min, \quad x \in G$$

folgt die Existenz eines $y \geq 0$ mit

$$z^T \bigtriangledown f(x_0) + y^T \bigtriangledown g(x_0) = 0, \quad y_j g_j(x_0) = 0 \quad \text{für} \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Für die Matrixelemente l_{ij} von L_0 wählen wir

$$l_{1j} = \frac{y_j}{z_1} \quad \text{für} \quad j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$l_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \in \{2, \ldots, k\} \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Dann gilt offensichtlich $L_0 g(x_0) = 0$ und $z^T L_0 = y^T$, so daß $(x_0, L_0) \in D_z$ erfüllt ist. Nach SATZ 4.11 folgt daher $f(x_0) = f(x_0) + L_0 g(x_0) \in \operatorname{Max} D_{11}$. □

SATZ 4.13: (Starker inverser Dualitätssatz)

Sei P nichtleer und abgeschlossen. In jedem Punkt $x \in \operatorname{ArgMin}_E P (= \{x \mid f(x) \in \operatorname{Min}_E P\})$ sei die Regularitätsbedingung aus LEMMA 4.2 (ii) erfüllt und wenigstens eine Restriktion g_i inaktiv. Dann gilt

$$\operatorname{Max} D_{11} \subseteq \operatorname{Min}_E P$$

.

Beweis:

Sei $h_0 = f(x_0) + L_0 g(x_0) \in \operatorname{Max} D_{11}$ mit $(x_0, L_0) \in G^*$.

Angenommen, es gilt $h_0 \notin P$. Nach dem Satz über die strenge Trennbarkeit (SATZ 2.6) existieren $z \neq 0$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$z^T h_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < z^T (f(x) + k) \quad \forall x \in G, \quad \forall k \in \mathbb{R}^k_+. \tag{4.4.1}$$

Die Annahme $z_i < 0$ führt sofort zum Widerspruch, da k_i beliebig groß werden kann, daher ist $z \succ 0$. Aus (4.4.1) folgt

$$z^T h_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \inf{}_{p \in P} (z^T p) = -\sup{}_{p \in P} (-z^T p) = -\delta^*(-z, P), \tag{4.4.2}$$

d.h. $-z \in \operatorname{dom} \delta^*$.

Gemäß LEMMA 4.4 existiert $z_0 > 0$, so daß

$$z_0^T h_0 \leq z_0^T p \quad \forall p \in P, \tag{4.4.3}$$

daher ist insbesondere $-z_0 \in \operatorname{dom} \delta^*$ und somit

$$z_\mu := \mu z_0 + (1 - \mu) z > 0 \quad \text{und} \quad -z_\mu \in \operatorname{dom} \delta^*$$

für $\mu \in (0,1)$. (4.4.2) und (4.4.3) ergeben leicht

$$z_\mu^T h_0 < (1-\mu)\alpha_1 + \inf{}_{p\in P}(\mu z_0^T p)$$

$$< \inf{}_{p\in P}((1-\mu)z^T p) + \inf{}_{p\in P}(\mu z_0^T p)$$
$$\leq \inf{}_{p\in P}(z_\mu^T p) \leq z_\mu^T p \quad \forall p \in P. \tag{4.4.4}$$

Da aus (4.4.2) $r.\mathrm{int}$ dom $\delta^* \neq \emptyset$ folgt, ergibt sich mit $-z_1 \in r.\mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,\delta^*$ für $z_\epsilon := \epsilon z_1 + (1-\epsilon)z_\mu$

$$-z_\epsilon \in r.\mathrm{int}\,\mathrm{dom}\,\delta^* \quad \text{und} \quad z_\epsilon > 0,$$

sofern $\epsilon \in (0,1)$ hinreichend klein ist. Darüber hinaus existieren $\bar p \in P$ und $p_1 \in P$ (vgl. ROCKAFELLAR (1970) Satz 23.4 und Korollar 23.5.3) mit

$$z_\epsilon^T \bar p \leq z_\epsilon^T p \quad \forall p \in P \tag{4.4.5}$$
$$z_1^T p_1 \leq z_1^T p \quad \forall p \in P \tag{4.4.6}$$

Seien

$$\beta_1 := (1-\mu)\alpha_1 + \inf{}_{p\in P}(\mu z_0^T p), \qquad \beta_2 := \inf{}_{p\in P}(z_\mu^T p), \qquad \beta_3 \in (\beta_1, \beta_2).$$

Sei $\epsilon \in (0,1)$ so klein, daß $z_\epsilon > 0$,

$$\beta_1 + \epsilon(z_1^T h_0 - z_\mu^T h_0) < \beta_3 \qquad \text{und} \qquad \beta_2 + \epsilon(z_1^T p_1 - \beta_2) > \beta_3$$

gelten.

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.4.4)) und (4.4.6)

$$z_\epsilon^T = z_\mu^T h_0 + \epsilon(z_1^T h_0 - z_\mu^T h_0) \qquad < \beta_1 + \epsilon(z_1^T h_0 - z_\mu^T h_0)$$

$$< \beta_3 < \beta_2 + \epsilon(z_1^T p_1 - \beta_2) \leq \epsilon z_1^T p + (1-\epsilon)\beta_2 \qquad \leq \epsilon z_1^T p + (1-\epsilon) z_\mu^T p = z_\epsilon^T p \quad \forall p \in P,$$

so daß mit (4.4.5)

$$z_\epsilon^T h_0 < \inf{}_{p\in P} z_\epsilon^T p = z_\epsilon^T \bar p \tag{4.4.7}$$

bewiesen ist.

Mithin ist auch $\bar p \in \mathrm{Min}_{\mathrm{E}}\, P$, und SATZ 4.12 besagt dann $\bar p \in \max D_{11}$. Der Beweis von SATZ 4.12 liefert genauer die Existenz von $\bar x \in G$ und $\bar L \in \mathbb{R}^{k\times m}$ mit

$$\bar p = F(\bar x, \bar L), \quad \bar L(g(\bar x) = 0, \quad z^T \bigtriangledown_x F(\bar x, \bar L) = 0^T.$$

Seien nun h, k und l in folgender Weise gewählt:

$$z_\epsilon^T h = z_\epsilon^T \bar p, \qquad k := F(\bar x, \bar L) - g_i(\bar x) l_i, \qquad l := \frac{1}{g_i(\bar x)}(h-k),$$

wobei g_i eine in $\bar x$ inaktive Restriktion und l_i die i-te Spalte von $\bar L$ bezeichnen.

Ersetzt man in $\bar L$ diese Spalte durch l, so entsteht

$$\tilde L := (l_1, \ldots, l_{i-1}, l, l_i, \ldots, l_m).$$

Wegen

$$z_\epsilon^T l = \frac{1}{g_i(\bar{x})}(z_\epsilon^T h - z_\epsilon^T k) = \frac{1}{g_i(\bar{x})}(z_\epsilon^T \bar{p} - z_\epsilon^T F(\bar{x}, \bar{L}) + g_i(\bar{x}) z_\epsilon^T l_i) = z_\epsilon^T l_i$$

folgt $z_\epsilon^T \tilde{L} = z_\epsilon^T \bar{L}$ und somit auch $z_\epsilon^T \bigtriangledown_x F(\bar{x}, \tilde{L}) = z_\epsilon^T \bigtriangledown_x F(\bar{x}, \bar{L}) = 0$, d.h. $(\bar{x}, \tilde{L}) \in D_z$.

Da $h = k + g_i(\bar{x}) l = F(\bar{x}, \tilde{L})$ leicht zu bestätigen ist, folgt stets $h \in D_{11}$. Setzt man

$$\tilde{h} := (\frac{1}{z_{\epsilon_1}}(z_\epsilon^T \bar{p} - z_\epsilon^T h_0) + h_{0_1}, h_{0_2}, \ldots, h_{0_k})^T, \tag{4.4.8}$$

so folgt

$$z_\epsilon^T \tilde{h} = z_\epsilon^T \bar{p} - z_\epsilon^T h_0 + z_\epsilon^T h_0 = z_\epsilon^T \bar{p},$$

d.h. $\tilde{h} \in D_{11}$. Wegen (4.4.7) folgt (4.4.8) nunmehr $\tilde{h} \succ h_0$; das ist ein Widerspruch zu $h_0 \in \operatorname{Max} D_{11}$.

Somit ist $h_0 \in P$ und LEMMA 4.4 sichert $h_0 \in \operatorname{Min}_{\mathrm{E}} P \quad \square$.

KOROLLAR 4.2:

Seien die Voraussetzungen von Satz 4.13 erfüllt. Es gilt $f(x_0) + L_0 g(x_0) \in \operatorname{Max} D_{11}$ genau dann, wenn für all $z > 0$ gilt

$$z^T(fx_0) + L_0 g(x_0)) \geq z^T(f(x) + Lg(x)) \qquad \forall (x, L) \in D_z.$$

Beweis:

(i) Sei $f(x_0) + L_0 g(x_0) \in \operatorname{Max} D_{11}$. Noch SATZ 4.13 existiert ein $f(x_1) \in \operatorname{Min}_{\mathrm{E}} P$ mit

$$f(x_1) = f(x_0) + L_0 g(x_0).$$

Wegen der Konvexität von $z^T F(\cdot, L)$ gilt für $(x, L) \in D_z$

$$z^T(f(x_1) - f(x) + Lg(x_1) - Lg(x)) \geq z^T \bigtriangledown F(x, L)(x_1 - x) = 0^T$$

und somit

$$z^T(f(x) + Lg(x)) \leq z^T(f(x_1) + Lg(x_1)) \leq z^T f(x_1) = z^T(f(x_0) + L_0 g(x_0)).$$

(ii) Angenommen, es gilt

$$f(x_0) + L_0 g(x_0) \prec f(x) + Lg(x)$$

für ein $(x, L) \in G^*$. Daraus folgt

$$z^T((fx_0) + L_0 g(x_0)) < z^T(f(x) + Lg(x))$$

für alle $z > 0$.$\square$

KOROLLAR 4.3:

Seien die Voraussetzungen von SATZ 4.13 erfüllt. Sei $(x_0, L_0) \in D_{z_0}$ mit $F(x_0, L_0) \in \operatorname{Max} D_{11}$. Ist $z^T F(\cdot, L_0)$ streng konvex in x_0, so existiert ein $f(x_1) \in \operatorname{Min}_{\mathrm{E}} P$ mit $f(x_1) = F(x_0, L_0)$, und es gilt $x_1 = x_0$.

Beweis:

Nach SATZ 4.13 existiert ein $f(x_1) \in \operatorname{Min}_{\mathrm{E}} P$ mit

$$f(x_1) = f(x_0) + L_0 g(x_0). \tag{4.4.9}$$

Angenommen, es gilt $x_1 \neq x_0$.

Es sind zwei Fälle möglich.

(i) $z^T f$ ist streng konvex in x_0. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&z_0^T(f(x_1) - f(x_0) - L_0 g(x_0)) > z_0^T(\bigtriangledown f(x_0)(x_1 - x_0) - L_0 g(x_0)) \\
&= -z_0^T(\bigtriangledown g(x_0)(x_1 - x_0) + g(x_0) - g(x_1)) - z_0^T L_0 g(x_1) \geq -z_0^T L_0 g(x_1) \geq 0.
\end{aligned}$$

(ii) Es gibt ein i mit $(z_0^T L_0)_i > 0$ und $g_i(\cdot)$ ist streng konvex in x_0. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&z_0^T(f(x_1) - f(x_0) - L_0 g(x_0)) \geq z_0^T(\bigtriangledown f(x_0)(x_1 - x_0) - L_0 g(x_0)) \\
&= -z_0^T L_0(\bigtriangledown g(x_0)(x_1 - x_0) + g(x_0) - g(x_1)) - z_0^T L_0 g(x_1) \\
&= -(z_0^T L_0)_i(g_i'(x_0)(x_1 - x_0) + g_i(x_0) - g_i(x_1)) > 0.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen erhalten wir demnach einen Widerspruch zu (4.4.9). Es gilt also $x_1 = x_0$.□

4.5 Das Dualproblem nach NAKAYAMA

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^k$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexe abgeschlossene polyedrische Kegel, die keinen nichttrivialen Unterraum enthalten und eine Halbordnung in $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^m$ induzieren.

Zum Vektoroptimierungsproblem

$$(P) \qquad f(x) \longrightarrow \text{Min}\,, \qquad x \in G = \{x \,|\, g(x) \leq 0\}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ konvex betrachtet NAKAYAMA (1982) das Dualproblem

$$(D_{12}) \qquad h \longrightarrow \text{Max}$$

$$h \in D_{12} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{Min} \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} [f(x) + Ug(x)],$$

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathbb{R}^{k \times m} \,|\, UQ \subseteq D\}.$$

BEMERKUNG 4.4:

Das Problem (D_{12}) wurde von TANINO/SAWARAGI (1979) für den Spezialfall $U^T = (u^* u^* \dots u^*)$ mit $u^* \in \mathbb{R}^m_+$ eingeführt. Dort wird nur eine direkte Dualitätsaussage der Form $\text{Min}_E P \subseteq \text{Max}\, D_{12}$ nachgewiesen.

BEMERKUNG 4.5:

Für $S \subseteq \mathbb{R}^k$ sei $\text{Min}_D S = \{x \in S \,|\, (S - x) \cap (-D) = \{0\}\}$. Es ist leicht zu bestätigen, daß

$$\text{Min}_D S = \{x \in S \,|\, Ax \in Min_{\mathbb{R}^k_+} A(S)\}$$

gilt, wobei $D = \{x \in \mathbb{R}^k \,|\, Ax \geq 0\}$.

Da jeder konvexe polyedrische Kegel auf diese Art dargestellt werden kann, beschränken wir uns, um die Formulierung zu vereinfachen, auf die üblichen Halbordnungen in $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^m$.

Bei NAKAYAMA (1982) findet man folgenden starken Dualitätssatz:

SATZ 4.14:

Sei Min $P = \mathrm{Min_E}\, P$ und für G sei die Slater-Bedingung erfüllt, d.h., es existiert ein $x_0 \in G$ mit $g(x_0) < 0$. Dann gilt

$$\mathrm{Min}\, P = \mathrm{Max}\, D_{12}.$$

BEMERKUNG 4.6:

Im Beweis dieser Behauptung wird folgende Aussage benutzt (NAKAYAMA (1982) Proposition 2.2):

Seien

$$(\hat{z}, \hat{y}) \in \mathrm{epi}\, W = \{(\xi, \eta) \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : \xi \geq g(x), \eta \geq f(x)\},$$
$$\mu \in \mathrm{int}\, \mathbb{R}^k_+, \quad \mathcal{U}(\lambda, \mu) = \{U \in \mathcal{U} \mid \mu^T U = \lambda^T\},$$

$$Y_H = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^k \mid \mu^T \bar{y} = \mu^T \hat{y} + \lambda^T \hat{z},\ \mu^T y + \lambda^T z \geq \mu^T \hat{y} + \lambda^T \hat{z} \quad \forall (z, y) \in \mathrm{epi}\, W\},$$

$$Y_K = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(\lambda,\mu)} \{\bar{y} \in \mathbb{R}^k \mid \bar{y} = \hat{y} + U\hat{z},\ y + Uz \not< \hat{y} + U\hat{z} \quad \forall (z, y) \in \mathrm{epi}\, W\},$$

Ist $\hat{z} \neq 0$, so gilt $Y_H = Y_K$.

Dieser Satz ist aber nicht richtig, denn seien

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x, \qquad g(x) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$(\lambda, \mu) = (0, (1, 2, 1)^T), \qquad (\hat{z}, \hat{y}) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 0,).$$

Dann ist $(\hat{z}, \hat{y}) \in \mathrm{epi}\, W$ und es sind auch alle anderen Voraussetzungen erfüllt.

Sei $\bar{y} = (1, 0, -1)^T$. Es ist $\bar{y} \in Y_H$.

Aus $\mu^T U = 0$ folgt $U = 0$, d.h. $\mathcal{U}(\lambda, \mu) = \{0\}$, und somit gilt auch $Y_K = \{0\}$, also $\bar{y} \notin Y_K$.

Die Behauptung des folgenden Satzes (NAKAYAMA (1982) Proposition 2.1) ist ebenfalls nicht richtig:

Es ist

$$f(\hat{x}) + Ug(\hat{x}) \in \mathrm{Min} \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} [f(x) + Ug(x)]$$

genau dann, wenn gilt

$$f(\hat{x}) + Ug(\hat{x}) \not> y + Uz \quad \forall (z, y) \in \mathrm{epi}\, W.$$

Seien $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = x$,

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^2} [f(x)+Ug(x)] = \operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1-x_2)+\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(x_2-x_1)+1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^2} [f(x)+Ug(x)].$$

Es gilt jedoch mit $(\bar{z},\bar{y}) = (0,(\frac{1}{2},1)^T) \in \operatorname{epi} W$

$$\bar{y}+U\bar{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}!$$

Der Satz ist sicher richtig, wenn man zusätzlich $U \in \mathcal{U}$ fordert.

Auch folgende Ausssage ist nicht korrekt (NAKAYAMA (1982) Proposition 4.2):

Im linearen Fall gilt

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} [Cx+U(b-Ax)] = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_1} Ub,$$

wobei

$$\mathcal{U}_1 = \{U \in \mathcal{U} \,|\, (C-UA)x \not< 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Seien $x \in \mathbb{R}$, $C^T = (1,-1)$, $b = 0$, $A = 0$. Es gilt

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}} [Cx+U(b-Ax)] = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u+v=0\},$$

jedoch

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}_1} Ub = \{0\}.$$

Wir beweisen nun einen Satz, der gewisse Verallgemeinerungen von Sattelpunktaussagen der nichlinearen Optimierung enthält.

SATZ 4.15:

Sei $L(x,U) = f(x)+Ug(x)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Sei $U^* \in \mathcal{U}$. Es gilt $f(x^*) \in \operatorname{Min} P$ mit $f(x^*) \not\succ y+U^*z$, $\forall (z,y) \in \operatorname{epi} W$.

(ii) $L(x^*,U^*) \in [\operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,U^*)] \cap [\operatorname{Max} \bigcup_{U\in\mathcal{U}} L(x^*,U)]$ und $U^* \in \mathcal{U}$.

(iii) $x^* \in G$, $U^* \in \mathcal{U}$ und $f(x^*) \in \operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,U^*)$.

(iv) $L(x^*,U^*) \in \operatorname{Min} \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,U^*)$, $\quad g(x^*) \leq 0$ und $U^*g(x^*) = 0$.

BEMERKUNG 4.7:

Dieser Satz ist in NAKAYAMA (1982) enthalten, der Beweis ist jedoch nicht korrekt. Wir führen den Beweis anders, was uns auch ermöglicht, ihn wesentlich kürzer zu gestalten.

Beweis:

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Es ist $f(x^*) = L(x^*, u^*)$ und wegen $g(x^*) \leq 0$ gilt $x^* \in G$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Aus $f(x^*) \in \text{Min} \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, U^*)$ und dem schwachen Dualitätssatz folgt der erste Teil der Aussage. Angenommen, es gibt ein $(z, y) \in \text{epi}\, W$ mit

$$y - f(x^*) + U^*(z - 0) \prec 0.$$

Es ist dann $y \geq f(\bar{x})$, $z \geq g(\bar{x})$ für ein $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ und wir erhalten den Widerspruch $f(\bar{x}) + U^* g(\bar{x}) \prec f(x^*)$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Aus $y - f(x^*) + U^* z \not\prec 0$ und $(g(x^*), f(x^*)) \in \text{epi}\, W$ folgt $U^* g(x^*) \not\prec 0$, und wegen $U^* \in \mathcal{U}$ und $x^* \in G$ ist $U^* g(x^*) = 0$. Mit dem selben Schluß wie im vorigen Punkt folgt $L(x^*, U^*) \in \text{Min} \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, U^*)$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Es gilt für $U \in \mathcal{U}$

$$f(x^*) + U g(x^*) \leq f(x^*) = f(x^*) + U^* g(x^*),$$

also

$$L(x^*, U^*) \in \text{Max} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} L(x^*, U)$$

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Angenommen, es gibt einen Index s mit $g_s(x^*) > 0$. Für die Elemente u_{ij} von U sei

$$u_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \neq s \\ 2 \max_k \left(\left| (U^* g(x^*))_k \right| / g_s(x^*) \right) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $U^* g(x^*) \prec U g(x^*)$ im Widerspruch zu

$$L(x^*, U^*) \not\prec L(x^*, U), \quad \forall U \in \mathcal{U} \tag{4.5.1}$$

Somit ist $g(x^*) \leq 0$. Für $U = 0$ erhalten wir aus (4.5.1) $U^* g(x^*) \not\prec 0$ und wegen $U^* g(x^*) \leq 0$ schließlich $U^* g(x^*) = 0$. $\square$

4.6 Das Dualproblem von GERSTEWITZ

Für das Vektoroptimierungsproblem

$$(P) \qquad f(x) \longrightarrow \text{Min}\,,$$

$$x \in G = \{x \in C \,|\, g(x) \in V\}, \quad C \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$$

wird in GERSTEWITZ (1983b) folgendes Dualproblem angegeben:

$$(D_{13}) \qquad h \longrightarrow \text{Max}$$

$$h \in D_{13} = \{h \in \mathbb{R}^k \,|\, \exists (L, z) \in W \times K^{\#} : z^T h = \inf{}_{x \in C} z^T (f(x) + L(x, g(x)))\},$$

$$W = \{L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \,|\, L(x, y) \in -K, \quad \forall (x, y) \in C \times V\}.$$

K ist ei abgeschlossener konvexer Kegel, der in $\mathbb{R}^k$ eine Halbordnung induziert.

Wir wollen im folgenden eine Modifikation des Problems (D_{13}) betrachten. Die Beweise sind wesentlich kürzer als bei GERSTEWITZ (1983b) und lassen sich auch auf die dort zugrundegelegten lokalkonvexen Vektorräume ohne Schwierigkeit übertragen.

$$(D'_{13}) \qquad h \longrightarrow \text{Max}$$

$$h \in D'_{13} = \{h \in \mathbb{R}^k \,|\, \exists t \in K^\#, y \in W' : t^T h \leq \inf_{x \in C} \{t^T(f(x) + y(g(x)))\},$$

$$W' = \{y : \mathbb{R}^m \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \,|\, y(v) \leq 0 \quad \forall v \in V\}.$$

SATZ 4.16:

Sei $h \in D'_{13}$. Dann existiert ein $t \in K^\#$ mit $t^T h \leq t^T f(x)$ für alle $x \in G$.

Beweis:

Sei $h \in D'_{13}$. Dann existieren $t \in K^\#$ und $y \in W'$ so daß gilt

$$t^T h \leq \inf_{x \in C} (t^T f(x) + y(g(x)) \leq t^T f(x) + y(g(x))) \leq t^T f(x) \quad \forall x \in G. \quad \Box$$

SATZ 4.17:

Für beliebige $x \in G$, $h \in D'_{13}$ gilt $f(x) \not\prec h$.

Beweis:

Aus $f(x) \prec h$ folgt $t^T h > t^T f(x)$ für alle $t \in K^\#$ im Widerspruch zu SATZ 4.16. $\Box$

SATZ 4.18: (Starker Dualitätssatz)

$\text{Min}_E\, P \subseteq \text{Max}\, D'_{13}$.

Beweis:

Seien

$$t^T f(x_0) = \min_{u \in G} t^T f(u) \quad \text{und} \quad y_0 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

definiert gemäß

$$y_0(u) = \begin{cases} 0 & u \in V \\ & \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt

$$\begin{gathered} \inf_{x \in C} [t^T f(x) + y(g(x))] \\ = \min \{\inf_{x \in G} [t^T f(x) + y(g(x))], \inf_{x \in C \setminus G} [t^T f(x) + y(g(x))]\} \end{gathered}$$

$$\inf_{x \in G} t^T f(x) = t^T f(x_0).$$

Somit gilt $f(x_0) \in D'_{13}$ und die Behauptung folgt aus SATZ 4.17. $\Box$

SATZ 4.19:

$h_0 \in \text{Max}\, D'_{13}$ gilt genau dann, wenn $t_h^T h \leq t_h^T h_0$ für alle $h \in D'_{13}$, wobei t_h ein zu h gehörende Element aus $K^\#$ bezeichnet (vgl. Def. von (D'_{13})).

Beweis:

(i) Sei $h_0 \in \text{Max}\, D'_{13}$. Dann gilt für alle $\tilde{h}$ mit $\tilde{h} \succ h_0$ und alle $t \in K^\#$, $y \in W'$

$$t^T \tilde{h} > \inf_{u \in C} [t^T f(u) + y(g(u))].$$

Somit gilt

$$t_{\bar{h}}^T h_0 = \inf_{\tilde{h} \geq h_0} t_{\bar{h}}^T \tilde{h} \geq \inf_{u \in C} [t_{\bar{h}}^T f(u) + y_{\bar{h}}(g(u))] \geq t_{\bar{h}}^T \bar{h}$$

(ii) Sei $h_0 \in D'_{13}$ aber $h_0 \notin \operatorname{Max} D'_{13}$. Dann gibt es ein $h \in D'_{13}$ mit $h \succ h_0$, und es gilt somit

$$t^T h > t^T h_0, \qquad \forall t \in K^{\#}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

SATZ 4.20: (Starker inverser Dualitätssatz)

Sei P konvex und abgeschlossen. Für alle $t \in K^{\#}$ mit $\inf_{x \in G} t^T f(x) > -\infty$ möge ein $x_0 \in G$ existieren mit $\inf_{x \in G} t^T f(x) = t^T f(x_0)$. Dann gilt $\operatorname{Max} D'_{13} \subseteq \operatorname{Min}_{\mathrm{E}} P$.

Beweis:

Sei $h_0 \in \operatorname{Max} D'_{13}$. Angenommen, $h \notin P$. Nach dem Satz über die strenge Trennbarkeit (SATZ 2.6) existieren $t \neq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$t^T h < \gamma_1 < \gamma_2 < t^T p \quad \forall p \in P.$$

Daraus folgt $t \in K^{\#} \backslash \{0\}$. Nach SATZ 4.16 existiert ein $t_1 \in K^{\#}$ mit

$$t_1^T h \leq t_1^T f(u) \quad \forall u \in G.$$

Sei $\lambda \in (0,1)$ und $t_\lambda = \lambda t_1 + (1-\lambda)t$. Dann ist $t_\lambda \in K^{\#}$, und es gilt

$$\begin{aligned}
&t_\lambda^T h = t^T h + \lambda(t_1^T h - t^T h), \\
&t_\lambda^T f(u) = \lambda t_1^T f(u) + (1-\lambda)t^T f(u) > \lambda t_1^T f(u) + (1-\lambda)\gamma_2 \\
&\qquad \geq \gamma_2 + \lambda(t_1^T h - \gamma_2) \quad \forall u \in G.
\end{aligned}$$

Somit gilt für genügend kleines $\lambda > 0$

$$t_\lambda^T h = t^T h + \lambda(t_1^T h - t^T h) < \gamma_1 < \gamma_2 + \lambda(t_1^T h - \gamma_2) < t_\lambda^T f(u), \quad \forall u \in G.$$

Daraus ergibt sich

$$t_\lambda^T h < \inf_{u \in G} t_\lambda^T f(u) = t_\lambda^T f(u_0)$$

für ein $u_0 \in G$. Das ist ein Widerspruch, denn nach SATZ 4.18 gilt $f(u_0) \in D'_{13}$, was wegen SATZ 4.19

$$t_\lambda^T h \geq t_\lambda^T f(u_0)$$

zur Folge hat. Somit ist $h \in P$ und die Behauptung folgt aus SATZ 4.16. □

BEMERKUNG 4.8:

In GERSTEWITZ (1983b) ist die Abgeschlossenheit von P, die im Beweis des Satzes 5. wesentlich eingeht, nicht gesichert. Betrachten wir etwa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t^2, -t)$, $C = \{t \,|\, t > 0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$, so sind die übrigen Voraussetzungen des Satzes 5. erfüllt, P ist jedoch nicht abgeschlossen.

Hingegen erweist sich die Forderung $\operatorname{Min}_{\mathrm{E}} \neq \emptyset$ als überflüssig, denn im Falle $\operatorname{Max} D'_{13} = \emptyset$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist stets (vgl. Beweis von SATZ 4.20) $\inf_{u \in C} t_\lambda^T f(u) > -\infty$ für ein $t_\lambda \in K^{\#}$ und somit laut Voraussetzung des SATZES 4.20 $\inf_{x \in G} t^T f(x) = t^T f(x_0)$ für ein $x_0 \in G$, d.h. $f(x_0) \in \operatorname{Min}_{\mathrm{E}} P$.

4.7 Eine notwendige Optimalitätsbedingung

Im Unterschied zu den bekannten notwendigen Bedingungen für das Vektoroptimierungsproblem (P) (vgl. Abschnitt 2.1), bei denen eine Skalarisierung der Lagrange-Funktion verwendet wird, wollen wir hier ein Kriterium vorstellen, das ohne Skalarisierung auskommt und auf SATZ 3.5 beruht. Für den Fall der gewöhnlichen nichtlinearen Optimierung erhält man den Satz von KUHN/TUCKER.

Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ konvex und differenzierbar.

$$(P) \quad f(x) \longrightarrow \mathrm{Min}\,, \qquad x \in G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}.$$

Wir benötigen folgende Regularitätsbedingung

$$\text{(R)} \quad \text{Das System} \quad \sum_{i \in I_0} y_i \bigtriangledown g_i(x_0) = 0, \quad y_i \neq 0 \quad \text{für ein} \quad i \in I_0.$$

hat keine Lösung, wobei

$$I_0 = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid g_i(x_0) = 0\}.$$

SATZ 4.21:

Sei $f(x_0) \in \mathrm{Min}_{\mathrm{E}}\, P$ und es gelte (R). Dan existiert ein $U_0 \in \mathbb{R}^{k \times m}$ mit $z^T U_0 \geq 0$ für ein $z > 0$, so daß gilt

$$\bigtriangledown f(x_0) + U_0 \bigtriangledown g(x_0) = 0$$
$$U_0 g(x_0) = 0.$$

Beweis:

Sei $f(x_0) \in \mathrm{Min}_{\mathrm{E}}\, P$. Nach LEMMA 4.2 (ii) ist das System

$$\bigtriangledown f(x_0)(x - x_0) \prec 0$$
$$\bigtriangledown g_{I_0}(x_0)(x - x_0) \leq 0$$

nicht lösbar.

Wegen (R) gilt Kern $\bigtriangledown g_{I_0}(x_0) = \{0\}$ und somit auch

$$\mathrm{Kern} \bigtriangledown g_{I_0}(x_0) \subseteq \mathrm{Kern} \bigtriangledown f(x_0).$$

Nach SATZ 3.5 existiert ein $\tilde{U}$ mit $z^T \tilde{U} \geq 0$ für ein $z > 0$ und

$$\bigtriangledown f(x_0) + \tilde{U} \bigtriangledown g_{I_0}(x_0) = 0.$$

Mit Hilfe von $\tilde{U}$ kann man ein $U_0 \in \mathbb{R}^{k \times m}$ folgendermaßen konstruieren. Für $j = 1, 2, \ldots, m$ wird, falls $j \notin I_0, \quad u_0^j = 0$ (u_0^j - die j-te Spalte von U_0) und $u_0^k = \tilde{u}^k$ für $k \in I_0$ gesetzt. Man prüft leicht nach, daß $z^T U_0 \geq 0$ gilt. Außerdem erhält man

$$\bigtriangledown f(x_0) + U_0 \bigtriangledown g(x_0) = 0$$
$$U_0 g(x_0) = 0.$$

Somit ist der Satz bewiesen $\square$.

4.8 Bibliographische Bemerkungen

Die Reihe der aus der Literatur bekannten Dualprobleme läßt sich noch fortsetzen.

Die von uns betrachteten Dualaufgaben werden oft unter dem Begriff LAGRANGE-Dualität zusammengefaßt. Dazu gehört noch die Dualaufgabe von NOGIN (1977), die eine Modifikation von (D_8) darstellt. CORLEY (1981) untersucht das Problem (D_{12}) in normierten Vektorräumen.

Eine andere Richtung bilden die Verallgemeinerungen des Dualitätssatzes von FENCHEL. BRECKNER (1972) verwendet FENCHEL-Konjugierte und beweist Dualitätsaussagen in topologischen Vektorräumen. GERSTEWITZ (1979) betrachtet eine Modifikation der Dualaufgabe von BRECKNER, um gewisse restriktive Voraussetzungen zu vermeiden. GROS (1977) deutet die von BRECKNER benutzten Konjugierten geometrisch als Abbildungen in projektiven Räumen und beweist eine Verallgemeinerung des Dualitätssatzes von FENCHEL.

Durch Verwendung anderer Optimalitätsbegriffe entstehen weitere Dualpaare.

Für sogenannte schwach effiziente Lösungen werden Dualaufgaben von OETTLI (1974) und di GUGLIELMO (1977) untersucht.

KAWASAKI (1981, 1982) betrachtet Supremummengen (eine Verallgemeinerung der schwachen Effizienz) und definiert verallgemeinerte Konjugierte, für die er Aussagen vom Typ $T(0) = T^{cc}(0)$ beweist. NIEUWENHUIS (1980) benutzt ebenfalls eine Verallgemeinerung der schwachen Effizienz (supremal points) und erhält starke Dualitätsaussagen unter gewissen Normalitätsvoraussetzungen.

Literatur

[1] ACHILLES, A.: *Optimalitätsbedingungen und Dualitätsaussagen in der Vektoroptimierung.*

Dissertation A , TH Ilmenau 1980.

[2] ACHILLES, A.; ELSTER, K.-H.; NEHSE, R. : *Bibliographie zur Vektoroptimierung. (Theorie und Anwendungen).*

Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization 10 (1979) 277-321.

[3] BACOPOULUS, A.; GODINI, C.; SINGER, I. : *Infima of sets in the plane and applications to vectorial optimization.*

Revue Roumaine de Matematiques Pures et Appliquèes 23 (1978) 343-360.

[4] BAZARAA, M.S.; SHETTY, C.M.: *Nonlinear programming. Theory and algorithms.*

John Wiley & Sons, New York 1979.

[5] BEN-ISRAEL, A.; BEN-TAL, A.; ZLOBEC, S.: *Optimality in nonlinear programming. A feasible directions approach.*

John Wiley & Sons, New York 1981.

[6] BENSON, H.P.: *An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones.*

J. Math. Anal. Appl. 71 (1979) 232-241.

[7] BERGE, C.: *Topological spaces.*

Oliver & Boyd, Edinburgh and London 1963.

[8] BITRAN, G.R.: *Duality for nonlinear multiple criteria optimization problems.*

J. Optimization Theory Appl. 35 (1981) 367-401.

[9] BITRAN, G.R.; MAGNANTI, T.L.: *The structure of admissible points with respect to cone dominance.*

J. Optimization Theory Appl. 29 (1979) 573-614.

[10] BITRAN, G.R.; MAGNANTI, T.L.: *Duality based characterizations of efficient facets.*

In: Fandel, G., Gal, T. (1980).

[11] BORWEIN, J.M.: *The geometry of Pareto efficiency over cones.*

Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization 11 (1980) 235-248.

[12] BRAGARD, L.; VANGELDÈRE, J.: *Points efficaces en programmation à objectifs multiples.*

Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 46 (1977) 27-41.

[13] BRECKNER, W.W:: *Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen. Teil I.*

Revue Analyse numérique et Théorie Appr. 1 (1972) 5-35.

[14] BRECKNER, W.W:: *Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen. Teil II.*

Revue Analyse numérique et Théorie Appr. 2 (1972) 5-35.i

[15] CHANKONG, V.; HAIMES, Y.Y.: *On multiobjective optimization theory: A unified treatment.*

Techn. Memo. No. SED-WRG-76-8, Syst. Engineering Department, Case Western Reserve Univ., Cleveland, hio, 1978.

[16] CORLEY, H.W.: *Duality theory for maximizations with respect to cones.*
J. Math. Anal. Appl. 84 (1981) 560-568.

[17] CRAVEN, B.D.: *Strong vector minimization and duality.*
Z. ang. Math. und Mech. 60 (1980) 1-5.

[18] CROUZEIX, J.-P.: *Contributions a l'etude de fonctions quasiconvexes.*
Dissertation, Universite de Clermont II, 1977.

[19] EKELAND, I.; TEMAM, R.: *Convex analysis and variational problems.*
North-Holland, Amsterdam 1976.

[20] ELSTER, K.-H.; NEHSE, R.: *Zum derzeitigen Entwicklungsstand der Vektoroptimierung.*
Wiss. Z. TH Ilmenau 26 (1980) 63-80.

[21] ELSTER, K.-H.; REINHARDT, R.; SCHÄUBLE, M.; DONATH, G.: *Einführung in die nichtlinearen Optimierung.*
Teubner, Leipzig, 1977.

[22] FIALA, P.: *Dualita v lineárni vektorové optimalizacei.*
Economicko matematcký obzor 3 (1981) 251-265.

[23] FOCKE, J.: *Vektormaximumproblem und parametrische Optimierung.*
Math. Operationsforsch. Statist. 4 (1973) 365-369.

[24] GÄHLER, S.: *Beiträge zur Polyoptimierung.*
Math. Nachr. 84 (1978) 333-344.

[25] GALE, D.; KUHN, H.W.; TUCKER, A.W.: *Linear programming and the theory of games.*
In: KOOPMANS, T.C. (Ed.): Activity analysis of production and allocation. Joh Wiley & Sons, 1961, 317-329.

[26] GEOFFRION, A.M.: *Proper efficiency and the thery of vector maximization.*
J. Math. Anal. Appl. 22 (1968) 618-630.

[27] GERSTEWITZ, C.: *Dualitätstheorie in der Vektoroptimierung.*
Diplomarbeit. Techn. Hochschule "C. Schorlemmer" Leuna-Merseburg 1979.

[28] GERSTEWITZ, C.: *Lagrange- und Frechetdualität in der Vektoroptimierung.*
Wiss. Z. TH Ilmenau, 5 (1982) 61-75.

[29] GERSTEWITZ, C.: *Eigentliche Effizienz in der Vektoroptimierung und ihre Anwendung in der Dualitätstheorie.*
In: Vorträge zu Problemen der Polyoptimierung und der mehkriterialen Entscheidungstheorie I, TH Karl-Marx-Stadt 1983, 21-31.

[30] GERSTEWITZ, C.: *Konstruktion lückenfreier Dualaufgaben in der Vektoroptimierung.*
(erscheint in Math. Operationsforsch. Statist., Ser Optimization)

[31] GERSTEWITZ, C.: *Nichtkonvexe Dualität in der Vektoroptimierung.*
(erscheint in Wiss. Z. TH Leuna-Merseburg)

[32] GERSTEWITZ, C.; GÖPFERT, A.; LAMPE, U.: *Zur Dualität in der Vektoroptimierung.*
In: Jahrestagung "Math. Optimierung" 1980 in Vitte (Hiddensee), 41-46

[33] GROS, C.: *Generalization of Fenchel's duality theorem for convex vector optimization.*

Eur. J. Oper. Res. 2 (1978) 368-376.

[34] GROS, C.: *Approche de la dualite en optimization multicritère.*

Cahiers Centre Êtudes Rech. Opèr. 22 (1980) 73-79.

[35] GUDDAT, J.: *Parametrische Optimierung und Vektoroptimierung.*

In: Anwendungen der linearen parametrischen Optimierung. Akad.-Verlag, Berlin 1979, 54-75.

[36] di GUGLIELMO, F.: *Nonconvex duality in multiobjective optimization.*

Math. of Operations Research 2 (1977) 285-291.

[37] HARTLEY, R.: *On cone-efficiency, cone-convexity and cone compactness.*

SIAM J. Appl. Math. 34 (1978) 2, 211-222.

[38] HARTWIG, H.: *Verallgemeinert konvexe Vektorfunktionen und ihre Anwendung in der Vektoroptimierung.*

Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization 10 (1979) 303-316.

[39] ISERMANN, H.: *Lineare Vektoroptimierung.*

Dissertation, Univ. Regensburg, 1974.

[40] ISERMANN, H.: *Existence and duality in linear multiple objective programming.*

In: Thiriez, H.; Zionts, S.: Multiple Criteria Decision Making. Lecture Notes in Econ. and Math. Systems 130 (1976) 64-75.

[41] ISERMANN, H.: *On some realtions between a dual pair of multiple objective linear programs.*

Z. Operations Res. 22 (1978) 1, 33-42.

[42] ISERMANN, H.: *Duality in multiple objective linear programming.*

Lecture Notes in Econ. and Math. Systems 155 (1978) 274-285.

[43] IVANOV, E.: *Über lineare duale Vektoroptimierungsprobleme.*

Wiss. Arbeiten der bulg. Aspiranten, TH Ilmenau 1982.

[44] IVANOV, E.: *Ergebnisse zu dualen Vektoroptimierungsproblemen.*

In: Jahrestagung Math. Optimierung 1983 in Sellin (erscheint in Seminarberichten der Humboldt-Universität Berlin).

[45] IVANOV, E.; NEHSE, R.: *Einige Dualitätsuntersuchungen für Vektoroptimierungsprobleme.*

In: Material zur Polyoptimierung und mehrkriterialen Entscheidungstheorie II, Schriftenreihe TH Karl-Marx-Stadt 1983, 1-17.

[46] IVANOV, E.; WILLÖPER, J.: *Existenz eigentlich effizienter Punkte abgeschlossener konvexer Mengen.*

Wiss. Z. der TH Ilmenau (erscheint).

[47] JAHN, J.: *Duality in vector optimization.*

Math. Progr. 25 (1983) 343-353.

[48] JAHN, J.: *Vektoroptimierung und deren Anwendung in der Approximations- und Steuerungstheorie.*

Habilitationsschrift, TH Darmstadt 1983.

[49] KAWASAKI, H.: *Conjugate relations and weak subdifferentials of relations.*

Math. of Operations Research 6 (1981) 593-607.

[50] KAWASAKI, H.: *A duality theorem in multiple objective nonlinear programming.*

Math. of Operations Research 1 (1982) 95-110.

[51] KLÖTZLER, R.: *Dualität bei diskreten Steuerungsproblemen.*

Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization 12 (1981) 411-420.

[52] KOYIMA, M.: *Duality between objects and constraints in vector optimum problems.*

J. Oper. Res. Soci. of Japan 15 (1972) 1, 53-62.

[53] KORNBLUTH, I.S.H.: *Duality, indifference and sensivity analysis in multiple objective linear programming.*

Oper. Res. Quaterly 25 (25) (1974), 599-614.

[54] LAMPE, U.: *Dualität und eigentliche Effizienz in Vektoroptimierung.*

Seminarber. Nr. 37 Humboldt-Univ., Berlin 1981, 45-54.

[55] LAMPE, U.: *Optimalitätsbedingungen in der konvexen Vektoroptimierung.*

Diplomarbeit, Techn. Hochschule C. Schorlemmer, Leuna-Merseburg 1980.

[56] LAURENT, P.-J.: *Approximation et Optimization.*

Hermann, Paris 1972.

[57] LEHMANN, R.; OETTLI, W.: *The theorem of alternative, the key-Theorem, and the vector- maximum problem.*

Math. Progr. 8 (1975) 332-344.

[58] MANGASARIAN, O.L.: *Nonlinear programming.*

McGraw-Hill, New-York 1969.

[59] NAKAYAMA, H.: *Duality and related theorems in convex vector optimization.*

Res. Report No. 4, Department of Applied Mathematics, Konan University 1980 (revised 1982).

[60] NEHSE, R.: *Ordnungstheoretische Untersuchengen zu nichtkonvexen Optimierungsproblemen.*

Dissertation B, TH Ilmenau 1978.

[61] NEHSE, R.: *Duale Vektoroptimierungsprobleme vom Wolfe-Typ.*

Seminarber. Nr. 37, Humboldt-Univ., Berlin 1981, 55-60.

[62] NEHSE, R.: *Bibliographie zur Vektoroptimierung, Theorie und Anwendungen (1. Fortsetzung).*

Math. Operationforsch. Statist., Ser. Optimization 13 (1982) 593-625.

[63] NIEUWENHUIS, J.W.: *Supremal points and generalized duality.*

Math. Operationforsch. Statist., Ser. Optimization 11 (1980) 41-59.

[64] NOGIN, V.D.: *Dvojstvennost' v mnogocelevom programmirovanii (russ.).*

Z. vycisl. mat. i mat. fiziki 17 (1977) 1, 254-258.

[65] OETTLI, W.: *A duality theorem for the nonlinear vector-maximum problem.*

Prog. Oper. Res., Eger 1094, Coloq. Math. Soc. J. Bolyai 12 (1976) 697-703.

[66] PODINOVSKIJ, V.V.; NOGIN, V.D.: *Pareto-optimal'nye resenija mnogokriterial'nyh zadac (russ.).*

Nauka, Moskau 1982.

[67] ROCKAFELLAR, R.T.: *Convex analysis.*

Princeton University Press., Princeton, N.J. 1970.

[68] RÖDDER, W.: *Der Sattelpunktbegriff für vektorwertige Funktionen und eine Anwendung auf lineare Vektoroptimierungsprobleme.*

Proc. Oper. Res. 6 (1976) 142-151.

[69] RÖDDER, W.: *Einige Dualitätsaussagen bei Vektoroptimierungsproblemen.*

Arbeitsbericht 76/02, TH Aachen, Aachen, 1976.

[70] RÖDDER, W.: *A generalized saddle-point theory as applied to duality theory for linear vector optimization problems.*

Eur. J. Operat. Res. 1 (1977) 55-59.

[71] RUDIN, W.: *Functional analysis.*

McGraw-Hill, New York 1973.

[72] SCHÖNFELD, P.: *Some theorems for the non-linear vector maximum problem.*

Unternehmensforschung 14 (1970) 1, 51-63.

[73] STADLER, W.: *A survey of multicriteria optimization or vector maximum problem. Part 1.*

J. Optimization Thery Appl. 29 (1979) 1-52.

[74] TANINO, T.; SAWARAGI, Y.: *Duality theory in multiobjective programming.*

J. Optimization Thery Appl. 27 (1979) 509-529.

[75] TANINO, T.; SAWARAGI, Y.: *Conjugate maps and duality in multiobjective optimization.*

J. Optimization Thery Appl. 31 (1980) 473-500.

[76] VLACH, M.: *DUBOVITSKIJ-MILYUTIN optimization formalism for multiple criteria problems.*

Operations Res. Verf. 31 (1979) 677-687.

[77] VOGEL, W.: *Lineares Optimieren.*

Geest & Portig, Leipzig 1970.

[78] VOGEL, W.: *Vektoroptimierung in Produkträumen.*

Math. Syst. in Economics 25, Anton Hain, Meisenheim am Glan 1977.

[79] VOGEL, W.: *Halbnormen und Vektoroptimierung.*

In: ALBACH, H.; HELSTÄDTER, E.; HEHN, R.: Quantitative Wirtschaftsforschung - Festschrift für W. Krelle, Tübingen, 1977, 703-714.

[80] VOGEL, W.: *Vectoroptimization without the use of functions.*

Preprint No. 395, Univ. Bonn, 1980.

[81] WILLÖPER, J.: *Komplementaritätsprobleme - Theorie und Anwendungen in der mathematischen Optimierung.*

Dissertation A, TH Ilmenau 1978.

[82] ZOWE, J.: *Konvexe Funktionen und konvexe Dualitätstheorie in geordneten Vektorräumen.*

Habilitationsschrift, Univ. Würzburg 1976.