Technische Hochschule Ilmenau
Sektion Mathematik, Rechentechnik

und ökonomische Kybernetik

Die Quasikonjgierten nach CROUZEIX und GREENBERG/PIERSKALLA

Diplomarbeit

Vorgelegt von: Emil Iwanow, geb. am 11.04.1954 in Sofia

Betreuer: Prof.Dr.rer.nat.habil. Elster, Doz.Dr.sc. Nehse

Ausgabetermin: 30.09.1978
Abgabetermin: 30.06.1979
Verteidigung am: 13.07.1979

T H E S E N

1. Es wird die Theorie der Quasikonjugierten nach GREENBERG/ PIERSKALLA und CROUZEIX einheitlich dargestellt.

2. Es wird gezeigt, daß die φ - Konvexität und die H-Konvexität in gewissem Sinne äquivalent sind.

3. Der Zusammenhang quasikonvexer Optimierungsprobleme mit den verallgemeinerten LAGRANGE-Funktionen wird aufgezeigt.

4. Durch Anwendung der Theorie der Quasikonjugation können in Verallgemeinerung des konvexen Falls K-Funktionen auch für quasikonvexe Optimierungsaufgaben konstruiert werden.

5. Es werden Anwendungen auf spezielle Vektoroptimierungsaufgaben gemacht.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Dualität konvexer Optimierungsprobleme und ihre Nutzung zur Charakterisierung gewisser Phänomene in der Theorie hat eine befriedigende Begründung in der Störungstheorie von ROCKAFELLAR [16] gefunden. Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Entwicklung dieser Theorie stellt der Begriff der FENCHEL-Konjugation dar. Zur Erfassung umfangreicherer Klassen von Optimierungsproblemen wurden bereits mehrere Verallgemeinerungen dieses Begriffs benützt (vgl. [7], [8], [12] etc.).

Eine Erweiterung, die insbesondere die Klasse der quasikonvexen Funktionen umfaßt, geht auf GREENBERG/PIERSKALLA und CROUZEUX zurück. Für die genannten Funktionen liefert sie Ergebnisse, die detailierter sind als die allgemeinen Aussagen für nichtkonvexe Funktionen mittels φ-Konjugation. Dies ist ein Grund dafür, diese Begriffsbildungen genauer zu untersuchen.

In dieser Arbeit werden die Theorie der Quasikonjugierten einheitlich dargestellt, ihre Beziehungen zu anderen verallgemeinerten Konjugierten untersucht und gewisse Anwendungen angegeben.

Im 1. Kapitel werden einige wichtige Eigenschaften der quasikonvexen Funktionen, wie die Halbstetigkeit und die duale Beschreibung durch die Niveaumengen (LEBESQUE-Mengen) wiedergegeben. Die Darstellung stützt sich auf [6], [14] und [15], wobei einige Beweise abweichen bzw. hinzugefügt wurden.

Die nächsten drei Kapitel enthalten die Theorie der Quasikonjugierten in der Gestalt, auf welche sie durch die Arbeiten von CROUZEIX gebracht wurde.

Im 2. Kapitel werden die Eigenschaften von quasikonvexen Bikonjugierten und ihre engen Verbindungen zu den quasikonvexen bzw. quasikonkaven unterhalbstetigen Regularisierten dargestellt.

Im 3. Kapitel werden die Quasikonjugierten bezüglich eines Punktes und ihre Beziehungen untereinander betrachtet.

Das 4. Kapitel enthält zwei Subdifferenzierbarkeitsbegriffe, die in der quasikonvexen Optimierung eine ähnliche Bedeutung wie das aus der konvexen Optimierung bekannte Subdifferential haben.

Im 5. Kapitel wird eine Beziehung der Quasikonjugierten zu den φ-Konjugierten angegeben.

Das 6. Kapitel beinhaltet eine Äquivalenzbeziehung zwischen zwei Verallgemeinerungen des Konvexitätsbegriffs: die φ-Konvexität und die H-Konvexität erweisen sich im gewissen Sinne als äquivalent, worauf unsereswissens in der Literatur noch nicht hingewiesen worden ist.

Im 7. Kapitel findet man die Dualitätstheorie quasikonvexer Optimierungsprobleme nach CROUZEIX, Abschätzungen für die Dualitätslücken und Beziehungen zu den verallgemeinerten LAGRANGE-Funktionen.

Das 8. Kpitel enthält eine Anwendung auf die Methode der K-Funktionen. Die Resultate von IOFFE/TICHOMIROV ([10]) für konvexe Optimierungsaufgaben werden mit Hilfe von Quasikonjugation für den quasikonvexen Fall erweitert.

Im 9. Kapitel werden gewisse Anwendungen bei Vektoroptimierungsproblemen für den Fall, daß das skalarisierte Problem quasikonvex ist, beschrieben.

Natürliche Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit. Die Bezeichnung (3.11) weist auf die elfte Formel im 3. Kapitel hin; entsprechend bezeichnet 3.11 den elften Abschnitt im 3. Kapitel, der eine Definition, eine Aussage oder eine Bemerkung beinhalten kann.

1 Quasikonvexe Funktionen und Niveaumengen

In diesem Kapitel werden einige Eigenschaften der quasikonvexen Funktionen, welche für die folgenden Betrachtungen von besonderem Interesse sein werden, angegeben.

DEFINITION 1.1: Eine Funktion $f : R^n \longrightarrow \bar{R}$ heißt quasikonvex, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{c} x_1, x_2 \in R^n \\ t \in [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Es ist klar, daß dann $\mathrm{dom} f := \{x \in R^m | f(x) < +\infty\}$ und die Niveaumengen $S_\lambda := \{x \in R^n | f(x) \leq \lambda\}$ konvex sind.

DEFINITION 1.2: Eine Funktion $f : R^n \longrightarrow \bar{R}$ heißt streng quasikonvex, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{c} x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f, \quad t \in (0,1) \\ f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Natürlich ist eine streng quasikonvexe Funktion im allgemeinen nicht quasikonvex , wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

MARTOS (vgl. [15]) führt deshalb noch folgenden Begriff ein:

DEFINITION 1.3: Eine Funktion $f : R^n \longrightarrow \bar{R}$ heißt explizit quasikonvex, wenn sie quasikonvex und streng quasikonvex ist.

DEFINITION 1.4: Eine Funktion $f : R^n \longrightarrow \bar{R}$ heißt unterhalbstetig in x bezüglich der Richtung $d \neq 0$, wenn die Funktion $\varphi(t) := f(x + t^2 d)$ unterhalbstetig in 0 ist. f heißt hemiunterhalbstetig in x, wenn sie unterhalbstetig in x bezüglich jeder Richtung $d \neq 0$ ist.

Es besteht folgender Zusammenhang:

SATZ 1.5: Die Funktion $f : R^n \longrightarrow \bar{R}$ sei streng quasikonvex und hemiunterhalbstetig. Dann ist f explizit quasikonvex.

Beweis :

Angenommen, f ist nicht quasikonvex. Es existieren also $x', x'' \in R^n$,

$t \in (0,1)$, so daß

$$f(x' + t(x'' - x')) > \max\{f(x'), f(x'')\}$$

gilt.

Da f streng quasikonvex ist, muß gelten

$$f(x') = f(x'').$$

Seien nun $0 < t_n \leq t_{n+1}$ mit $t_n \longrightarrow t, \xi = x' + t(x'' - x')$ und $x_n = x' + t_n(x'' - x')$.

Wegen $x_n = x' + \frac{t_n}{t}(\xi - x')$ und der strengen Quasikonvexität von f folgt

$$f(x_n) < f(\xi).$$

Infolge

$$\xi = x_n + \frac{t - t_n}{1 - t_n}(x'' - x_n)$$

muß gelten

$$f(x_n) = f(x''). \tag{1.1}$$

Sei $f(\xi) > \lambda > f(x'')$.

Für jedes $\eta > 0$ existiert wegen $x_n \longrightarrow \xi$ ein x_m mit

$$x_m \in (\xi + \eta(x' - \xi), \xi].$$

Wegen (1.1) gilt dann $f(x_m) < \lambda$ im Widerspruch zur Hemiunterhalbstetigkeit von f. $\square$

Es stellt sich heraus, daß unter den Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes die Funktion f sogar unterhalbstetig ist.

SATZ 1.6: Sei $f : R^n \longrightarrow \bar{R}$ eine quasikonvexe Funktion. Dann gilt:

(i) Ist f hemiunterhalbstetig in x, so ist sie auch unterhalbstetig in x.

(ii) Ist f hemioberhalbstetig in x, so ist sie auch oberhalbstetig in x.

Beweis :

(i) Angenommen, es existiert ein $\lambda < f(x)$, so daß es für jede Umgebung U von x ein $\bar{x} \in U$ gibt mit $f(\bar{x}) \leq \lambda$.

Oder, was dasselbe ist,

$$\bar{x} \in S_\lambda = \{x \in R^n | f(x) \leq \lambda\}.$$

Das bedeutet aber gerade $x \in \bar{S}_\lambda$.

Da S_λ konvex ist, existiert ein $x' \in \mathrm{ri}S_\lambda$ [1] und darüber hinaus gilt

$$x + t(x' - x) \in S_\lambda, \qquad \forall t \in (0, 1).$$

Daher kann f nicht unterhalbstetig in x bezüglich der Richtung $d = x' - x$ sein.

(ii) Seien $\lambda > f(x)$ und $e_1, e_2, ..., e_n$ eine Basis des R^n. Da f hemioberhalbstetig in x ist, existieren $t_i', t_i'' > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, so daß gilt:

$$f(x + te_i) \leq \lambda, \qquad \forall t \in [-t_i', t_i''],$$

und demzufolge

$$x + t_i'' e_i \in S_\lambda, \quad x - t_i' e_i \in S_\lambda, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Sei C die konvexe Hülle dieser $2n$ Vektoren. Sa S_λ konvex ist, muß gelten $C \subseteq S_\lambda$. Daher existiert eine Umgebung V von x, derart daß

$$f(v) \leq \lambda, \quad \forall v \in V.$$

□

<u>FOLGERUNG 1.7:</u> Sei $f : R^n \longrightarrow \bar{R}$ quasikonvex. Dann gilt:

(i) f hemistetig in $x \Longrightarrow f$ stetig in x;

(ii) f GATEAUX-differenzierbar $x \Longrightarrow f$ stetig in x;

<u>Beweis :</u>

(i) folgt unmittelbar aus dem SATZ 1.6.

(ii) Aus der GATEAUX-Differenzierbarkeit von f in x folgt bekanntlich die Hemistetigkeit von f in x (vgl. [22]). Die Behauptung ergibt sich unter Berücksichtigung von (i). □

Es besteht die Möglichkeit konvexe Funktionen durch spezielle konvexe Mengen zu beschreiben; dies wollen wir hier kurz skizzieren.

$\Lambda \subset R^n \times R$ genüge folgender Bedingung:

[1] Das relativ Innere ri$A$ von A ist das Innere von A bezüglich der Spurtopologie der affinen Hülle von A.

$$\left.\begin{array}{c}(x,\lambda)\in\Lambda\\ \mu>\lambda\end{array}\right\}\Longrightarrow(x,\mu)\in\Lambda \tag{1.2}$$

Mittels Λ erklären wir

$$g(x) := \inf\{\lambda \quad | \quad (x,\lambda)\in\Lambda\}. \tag{1.3}$$

Falls $A = \mathrm{epi}f$, so ist $f \equiv g$. Allerdings braucht eine Menge, die der Bedingung (1.2) genügt, kein Epigraph zu sein. Sei nun

$$\widetilde{\Lambda} := \{(x,\lambda)\in R^n\times R \quad | \quad (x,\mu)\in\Lambda, \quad \forall\mu>\lambda\}.$$

$\widetilde{\Lambda}$ definiert gemäß (1.3) die gleiche Funktion g und ist zugleich ihr Epigraph. Eine Menge Λ, die der Bedingung (1.2) genügt ist der Epigraph der durch sie definierte Funktion g genau dann, wenn $\Lambda = \widetilde{\Lambda}$ gilt. Eine ähnliche, für die quasikonvexen Funktionen sehr nützliche Konstruktion geht von den Niveaumengen aus. Sei $\{S_\lambda\}_{\lambda\in R}$ eine Familie von Untermengen des R^n, die der folgenden Bedingung genügen:

$$\lambda<\mu\Longrightarrow S_\lambda\subseteq S_\mu. \tag{1.4}$$

Vermöge $\{S_\lambda\}$ definieren wir folgende Funktion h:

$$h(x) := \inf\{\lambda \quad | \quad x\in S_\lambda\}. \tag{1.5}$$

Ist $\{S_\lambda\}$ die Familie der Niveaumengen einer Funktion f, so ist $f \equiv h$. Von einer Mengenfamilie, die (1.4) genügt, ist nicht zu erwarten, daß sie mit der Familie der Niveaumengen der durch sie definierten Funktion h identisch ist.

Betrachten wir etwa die Familie

$$A = \{(-\infty,\lambda)\}_{\lambda\in R}$$

Dann gilt $h(x) = x$, und die Familie der Niveaumengen ist

$$\{(-\infty,\lambda]\}_{\lambda\in R}$$

<u>**SATZ 1.8:**</u> Die Familie $\{S_\lambda\}_{\lambda\in R}$ genüge (1.4). Sei $\widetilde{S}_\lambda = \bigcap_{\mu>\lambda} S_\mu$. Sei weiter $h \quad (\widetilde{h})$ die durch $\{S_\lambda\} \quad (\{\widetilde{S}_\lambda\})$ gemäß (1.5) definierte Funktion.

Dann gilt:

(i) $h \equiv \widetilde{h}$;

(ii) $\{S_\lambda\}$ ist die Familie der Niveaumengen von h genau dann wenn gilt

$$\{S_\lambda\} = \{\widetilde{S}_\lambda\}, \quad \forall \lambda \in R;$$

(iii) Ist $\{S_\lambda\}$ für alle $\lambda \in R$ konvex, so ist h quasikonvex;

(iv) Ist $\{S_\lambda\}$ für alle $\lambda \in R$ abgeschlossen, so ist h unterhalbstetig;

Beweis :

(i) Wegen (1.4) gilt

$$\{S_\lambda\} \subseteq \{\widetilde{S}_\lambda\}, \tag{1.6}$$

also auch $h(x) \geq \widetilde{h}(x)$.

Falls $h(x) > \widetilde{h}(x)$ ist, so existiert ein μ mit

$$h(x) > \mu > \widetilde{h}(x)$$

.

Wegen $\mu > \widetilde{h}(x)$ existiert ein $\lambda < \mu$, so daß $x \in \widetilde{S}_\lambda$, d.h. $x \in \widetilde{S}_\nu$ für alle $\nu > \lambda$.

Speziell für $\nu = \mu$ gilt daher $x \in S_\mu$, woraus sich der Widerspruch $h(x) \leq \mu$ ergibt.

(ii) Sei $\{S_\lambda\}$ die Familie der Niveaumengen von h. Zu zeigen ist $S_\lambda = \widetilde{S}_\lambda$, und wegen (1.6) genügt es schon $S_\lambda \supseteq \widetilde{S}_\lambda$ nachzuweisen.

Sei $x \in \widetilde{S}_\lambda$, d.h. $x \in S_\mu, \quad \forall \mu > \lambda$.

Daraus folgt

$$h(x) \leq \mu, \quad \forall \mu > \lambda. \tag{1.7}$$

Sei $h(x) > \lambda$. Dann existiert ein ν mit $h(x) > \nu > \lambda$. Das ist ein Widerspruch zu (1.7) und folglich gilt $h(x) \leq \lambda$, d.h. $x \in S_\lambda$.

Sei nun $\widetilde{S}_\lambda = S_\lambda$ für alle $\lambda \in R$. Für $x \in S_\lambda$ folgt

$$h(x) = \inf\{\mu | x \in S_\mu\} \leq \lambda$$

und mithin

$$S_\lambda \subseteq \{x \in R^n | h(x) \leq \lambda\}.$$

Seien x und μ derart gewählt, daß

$$h(x) \leq \lambda \qquad \text{und} \qquad \mu > \nu.$$

Aus $x \notin S_\mu$ folgt $h(x) > \mu$, es gilt also $x \in S_\mu$;
mithin ist

$$x \in \bigcap_{\mu > \nu} S_\mu = S_\lambda$$

und folglich gilt

$$\{x \in R^n | h(x) \leq \lambda\} \subseteq S_\lambda.$$

(iii) Ist S_λ konvex für alle $\lambda \in R$, so sind die Niveaumengen $\widetilde{S}_\lambda$ von h ebenfalls konvex.

(iv) Ist S_λ abgeschlossen für alle $\lambda \in R$, so sind die Niveaumengen $\widetilde{S}_\lambda$ von h ebenfalls abgeschlossen. □

Die Betrachtung von Niveaumengen erweist sich als vorteilhaft bei der Untersuchung von quasikonvexen Regularisierten.

DEFINITION 1.9: Sei $f : R^n \to \bar{R}$.

$f_q : R^n \to \bar{R}$ heißt quasikonvexe Regularisierte von f, wenn f_q (im Falle der Existenz) die "größte" [2] quasikonvexe Funktion ist, die von f majorisiert wird.

$f_{\bar{q}} : R^n \to \bar{R}$ heißt quasikonvexe unterhalbstetige Regularisierte von f, wenn $f_{\bar{q}}$ (wenn sie existiert) die "größte" quasikonvexe unterhalbstetige Funktion ist, die von f majorisiert wird.

SATZ 1.10: Seien $f : R^n \to \bar{R}$ und $\{S_\lambda\}_{\lambda \in R}$ die Familie der Niveaumengen von f.

Dann existieren f_q und $f_{\bar{q}}$, und werden durch $\{\text{conv}S_\lambda\}_{\lambda \in R}$ bzw. $\{\overline{\text{conv}}S_\lambda\}_{\lambda \in R}$ gemäß (1.5) definiert.

Beweis :

Seien $B_\lambda = \text{conv}S_\lambda$ und $C_\lambda = \overline{\text{conv}}S_\lambda$.

$\{B_\lambda\}_{\lambda \in R}$ und $\{C_\lambda\}_{\lambda \in R}$ genügen dann der Bedingung (1.4). Sei g bzw. h die durch $\{B_\lambda\}_{\lambda \in R}$ bzw. $\{C_\lambda\}_{\lambda \in R}$ gemäß (1.5) definierte Funktion.

[2] Im Sinne der Halbordnung: $f \geq g \Longleftrightarrow f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in R^n$.

Nach SATZ 1.8 ist g quasikonvex sowie h quasikonvex und unterhalbstetig.

Seien k quasikonvex, $k \leq f$ und $D_\lambda = \{x \in R^n | k(x) \leq \lambda\}$.

Da $D_\lambda \supseteq S_\lambda$ gilt und D_λ konvex ist, folgt $D_\lambda \supseteq B_\lambda$. Für

$$\widetilde{D}_\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} D_\mu, \quad \widetilde{B}_\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} B_\mu, \quad \widetilde{S}_\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} S_\mu$$

gilt somit

$$D_\lambda = \widetilde{D}_\lambda \supseteq \widetilde{B}_\lambda \supseteq \widetilde{S}_\lambda = S_\lambda$$

und, da $\{\widetilde{B}_\lambda\}$ die Familie der Niveaumengen von g ist,

$$k \leq g \leq f.$$

In der gleichen Weise erhält man für eine quasikonvexe unterhalbstetige Funktion j mit $j \leq f$:

$$j \leq h \leq f.$$

Das bedeutet aber gerade $g \equiv f_q$ und $h \equiv f_{\bar{q}}$. $\square$

<u>SATZ 1.11:</u> Sei $f : R^n \to \bar{R}$ quasikonvex.

Dann sind folgende Aussagen equivalent :

(i) f ist hemiunterhalbstetig in x;

(ii) $f(x) = f_{\bar{q}}(x)$.

<u>Beweis :</u>

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Sei $\lambda < f(x)$. Da $f_{\bar{q}}$ definitionsgemäß unterhalbstetig in x ist, existiert eine Umgebung U von x_0, so daß gilt:

$$f_{\bar{q}}(u) > \lambda \qquad \forall u \in U.$$

Wegen $f(x) \geq f_{\bar{q}}(x)$ folgt $f(u) > \lambda$ für alle $u \in U$. Das bedeutet aber gerade, daß f unterhalbstetig in x ist, also auch hemiunterhalbstetig.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Nach SATZ 1.6 ist f unterhalbstetig in x, d.h. für jedes λ mit $\lambda < f(x)$ existiert eine Umgebung U von x mit $f(u) > \lambda$ für alle $u \in U$. Sei $V \subseteq U$ eine konvexe Umgebung von x.

$S_\lambda = \{x | f(x) \leq \lambda\}$ ist konvex und es gilt

$$S_\lambda \cap V = \emptyset.$$

Da V als offen vorausgesetzt werden kann, gilt sogar

$$\overline{S}_\lambda \cap V = \emptyset.$$

Daraus folgt

$$x \notin \overline{S}_\lambda.$$

Weiter hat man

$$f_{\bar{q}} = \inf\{\mu | x \in \overline{S}_\mu\} \geq \lambda$$

und mithin

$$f(x) \geq f_{\bar{q}}(x).$$

Da ja stets $f(x) \leq f_{\bar{q}}(x)$ gilt, erhalten wir die Behauptung. $\square$

2 Die Quasikonjugierten bezüglich eines Punkts

Natürlich sind die Bikonjugierten vom vorigen Kapitel nicht ausreichend, um eine Dualität, die der konvexen nahekommen soll, erhalten zu können. Zur Aufstellung von Dualproblemen werden einfache Konjugierte benötigt. Die folgenden Begriffsbildungen verdankt man CROUZEIX [6].

Ausgehend von SATZ 2.5 (i) erklären wir

DEFINITION 3.1: Seien $f : R^n \to \bar{R}, \quad x \in R^n \quad y \in R^n$.

$$q_f^G(x,y) = \inf_w \{f(w) | (w-x,y) \geq 0\}$$

heißt die G-Konjugierte von f bezüglich x.

Einige Eigenschaften der G-Konjugierten sind im folgenden Satz aufgeführt:

SATZ 3.2: Seien $f : R^n \to \bar{R}, \quad x \in R^n$. Dann gilt:

(i) $q_f^G(x,ky) = q_f^G(x,y), \quad \forall y \in R^n, \quad \forall k > 0$;

(ii) $q_f^G(x,0) = \inf_w f(w) \leq q_f^G(x,y), \quad \forall y \in R^n$;

(iii) $q_f^G(x,\cdot)$ ist quasikonkav;

(iv) $q_f^G(x,\cdot) = q_{f_q}^G(x,\cdot) = q_{f^{GG}}^G(x,\cdot)$;

(v) $f^{GG}(x) = \sup_y q_f^G(x,y)$.

Beweis :

(i) und (ii) sind offensichtlich.

(iii) Wegen (i) genügt es

$$q_f^G(x,y_1+y_2) \geq \min\{q_f^G(x,y_1), q_f^G(x,y_2)\}$$

zu zeigen.

Sei $\varepsilon > 0$. Gemäß DEFINITION 3.1 existiert ein $w \in R^n$, für welches gilt:

$$f(w) \leq q_f^G(x,y_1+y_2) + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad (y_1+y_2, w-x) \geq 0. \tag{3.1}$$

Falls $(y_1, w-x) \geq 0$ ist, so folgt

$$q_f^G(x,y_1) \leq f(w);$$

andernfalls muß gelten $(y_2, w-x) \geq 0$ (sonst erhalten wir einen Widerspruch zu (3.1)), und mithin:

$$q_f^G(x, y_2) \leq f(w).$$

Folglich gilt

$$\min\{q_f^G(x, y_1), q_f^G(x, y_2)\} \leq f(w) \leq q_f^G(x, y_1 + y_2) + \varepsilon.$$

(iv) Wegen $f^{GG} \leq f_q \leq f$ (vgl. SATZ 2.11) gilt

$$q_f^G(x, \cdot) \geq q_{f_q}^G(x, \cdot) \geq q_{f^{GG}}^G(x, \cdot),$$

und es genügt

$$q_f^G(x, \cdot) \leq q_{f^{GG}}^G(x, \cdot)$$

zu zeigen.

$x \in R^n$ sei beliebig aber fest.

Zu jedem $y \in R^n$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $w \in R^n$, so daß gilt:

$$f^{GG}(w) \leq q_{f^{GG}}^G(x, y) + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad (w - x, y) \geq 0. \tag{3.2}$$

Nach SATZ 2.5 (i) existiert ein $v \in R^n$ mit

$$f(v) \leq f^{GG}(w) + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad (v - w, y) \geq 0.$$

Wegen (3.2) gilt $(v - x, y) \geq 0$, und somit ist

$$\begin{aligned} q_f^G(x, y) = \inf_u \{f(u) | (u - x, y) \geq 0\} \\ \leq f(v) \leq f^{GG}(w) + \varepsilon \\ \leq q_{f^{GG}}^G(x, y) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

(v) folgt sofort aus SATZ 2.5 (i). $\square$

In analoger Weise definiert man:

<u>DEFINITION 3.3:</u> Seien $f : R^n \to \bar{R}, \quad x \in R^n \quad y \in R^n$.

$$q_f^C(x, y) = \inf\{\lambda | \sup_w \{(w - x, y) | f(w) \leq \lambda\} \geq 0\}$$

heißt die C-Konjugierte von f bezüglich x.

Zwischen den C-Konjugierten und den G-Konjugierten besteht viel Ähnlichkeit in Bezug auf einige ihrer Eigenschaften; dies verdeutlicht folgender Satz.

SATZ 3.4: Seien $f : R^n \to \bar{R}, \quad x \in R^n$. Dann gilt:

(i) $q_f^C(x, ky) = q_f^C(x, y), \quad \forall y \in R^n, \quad \forall k > 0$;

(ii) $q_f^C(x, 0) = \inf_w f(w) \le q_f^C(x, y), \quad \forall y \in R^n$;

(iii) $q_f^C(x, \cdot)$ ist quasikonkav;

(iv) $q_f^C(x, \cdot) = q_{f_q}^C(x, \cdot) = q_{f_{\bar{q}}}^C(x, \cdot) = q_{f^{GG}}^C(x, \cdot)$;

(v) $f^{CC}(x) = \sup_y q_f^C(x, y)$.

Beweis :

(i) und (ii) sind trivial.

(iii) Wir zeigen, daß $-q_f^C(x, \cdot)$ quasikonvex ist.

Die Definition von q_f^C kann man offenbar wie folgt schreiben:

$$q_f^C(x, y) = \inf\{\lambda | \delta^*(y|S_\lambda) \ge (x, y)\}.$$

Seien

$$A = \inf\{\lambda | \delta^*(y|S_\lambda) \ge (x, y)\},$$
$$B = \inf\{\lambda | \delta^*(y|S_\lambda) < (x, y)\},$$

sowie $\lambda \in A$ und $\mu \in B$.

Aus $\lambda < \mu$ folgt $S_\lambda \subseteq S_\mu$ und hieraus der Widerspruch

$$\delta^*(y|S_\lambda) \le \delta^*(y|S_\mu) < (x, y).$$

Es gilt also $\lambda \ge \mu$ und zwar für beliebige $\lambda \in A$ und $\mu \in B$.

Somit ist $\inf A \ge \sup B$.

Sei nun $\mu < \inf A$ und somit $\mu \notin A$.

Dann hat man

$$\delta^*(y|S_\mu) < (x, y),$$

d.h. $\mu \notin B$.

Daraus folgt $\mu \leq \sup B$, und mithin

$$\inf A \leq \sup B$$

Wir dürfen deshalb schreiben:

$$q_f^C(x,y) = \sup\{\lambda | \delta^*(y|S_\lambda) < (x,y)\}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
-q_f^C(x,y) &= -\sup\{-\lambda | \delta^*(y|S_\lambda) < (x,y)\} \\
&= \inf\{\mu | \delta^*(y|S_{-\mu}) < (x,y)\}.
\end{aligned}$$

Wir setzen $D_\mu = \{y|\delta^*(y|S_{-\mu}) < (x,y)\}$. Offenbar ist D_μ ein konvexer Kegel.

Sei $y \in D_\lambda$.

Ist $\lambda < \mu$, so gilt $S_{-\mu} \subseteq S_{-\lambda}$ und mithin

$$\delta^*(y|S_{-\mu}) \leq \delta^*(y|S_{-\lambda}) < (x,y),$$

d.h. $y \in D_\mu$, und somit $D_\lambda \subseteq D_\mu$.

Folglich genügt D_μ der Bedingung (1.4).

Wegen

$$-q_f^C(x,y) = \inf\{\mu | y \in D_\mu\}$$

brauchen wir nur noch SATZ 1.8 (iii) zu berücksichtigen.

(iv)

Aus

$$f_{\bar{q}} \leq f^{GG} \leq f_q \leq f$$

folgt

$$q_{f_{\bar{q}}}^C(x,\cdot) \leq q_{f^{GG}}^C(x,\cdot) \leq q_{f_q}^C(x,\cdot) \leq q_f^C(x,\cdot)$$

Es genügt also $q_{f_{\bar{q}}}^C(x,\cdot) = q_f^C(x,\cdot)$ zu zeigen.

Seien

$$S_\lambda = \{x|f(x) \leq \lambda\}, \quad C_\lambda = \overline{\text{conv}} S_\lambda \quad \text{und} \quad \widetilde{C}_\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} C_\mu$$

.

Wir haben weiter

$$\begin{aligned} q_f^C(x,y) &= \inf\{\lambda | \sup_w \{(w-x,y) | f(w) \leq \lambda\} \geq 0\} \\ &= \inf\{\lambda | \delta^*(y|S_\lambda) \geq (x,y)\} \\ &= \inf\{\lambda | \delta^*(y|C_\lambda) \geq (x,y)\}; \end{aligned}$$

$$q_{f_{\bar{q}}}^C(x,y) = \inf\{\lambda | \delta^*(y|\widetilde{C}_\lambda) \geq (x,y)\};$$

Angenommen, es gibt ein $y_0 \in R^n$ mit

$$q_{f_{\bar{q}}}^C(x,y_0) < q_f^C(x,y_0).$$

Sei

$$q_{f_{\bar{q}}}^C(x,y_0) < \mu < q_f^C(x,y_0).$$

Wegen $q_{f_{\bar{q}}}^C(x,y_0) < \mu$ existiert ein $\lambda < \mu$ mit

$$\delta^*(y_0|\widetilde{C}_\mu) \geq (x,y_0).$$

Aus $\mu < q_f^C(x,y_0)$ folgt $\delta^*(y_0|C_\mu) < (x,y_0)$,
und somit

$$\delta^*(y_0|C_\lambda) > \delta^*(y_0|C_\mu).$$

Im Widerspruch dazu folgt aus $\mu > \lambda$

$$\delta^*(y_0|C_\lambda) \leq \delta^*(y_0|C_\mu).$$

(v)

Es genügt gemäß (iv) quasikonvexe unterhalbstetige Funktionen zu betrachten.
Es gilt (vgl. DEFINITION 3.3):

$$q_f^C(x,y) \leq f(x) \qquad \forall y \in R^n.$$

Falls $f(x) = \inf f(w)$ gilt, folgt aus (i)

$$q_f^C(x,y) = f(x)$$

Sei nun $\inf_w f(w) < \lambda < f(x)$.

Die Niveaumenge S_λ von f ist nichtleer, konvex und abgeschlossen. Da f unterhalbstetig in x ist, existiert eine konvexe, kompakte Umgebung V von x, so daß gilt:

$$f(v) > \lambda \qquad \forall v \in V$$

Das bedeutet $V \cap D_\lambda = \emptyset$. Daher können V ud S_λ streng getrennt werden, d.h.

$$\sup_w \{(w,y) | w \in S_\lambda\} < \inf_v \{(v,y) | x \in V\}$$

für ein geeignetes y.

Somit ist

$$\delta^*(y|S_\lambda) < (x,y), \qquad \text{also} \qquad q_f^C(x,y) > \lambda,$$

und

$$q_f^C(x,y) \geq f(x).$$

□

Eine einfache Bedingung zwischen der G-Konjugierten und der C-Konjugierten kann man sofort angeben.

SATZ 3.5: Sei $f : R^n \to \bar{R}$. Dann gilt:

$$q_f^C \leq q_f^G.$$

Beweis :

Seien $x, y \in R^n$, $\qquad \lambda > q_f^G(x,y)$.

Dann existiert ein $w \in R^n$, so daß gilt:

$$f(w) \leq \lambda \qquad \text{und} \qquad (w,y) \geq (x,y);$$

folglich ist

$$\sup_v \{(v-x,y) | f(v) \leq \lambda\} \geq 0,$$

und mithin

$$q_f^C(x,y) \leq \lambda.$$

□

Es genügt eine Bedingung an das Wachstum der linearen Funktionale in Abhängigkeit von den Niveaumengen von f zu stellen, um die Gleichheit von q_f^C und q_f^G zu erzwingen.

DEFINITION 3.6: Seien $f : R^n \to \bar{R}$, $m = \inf f(x)$ und $M > m$.

f heißt M-regulär bezüglich $y \neq 0$, wenn für alle $\lambda, \mu \in R$ mit $m < \lambda < \mu < M$ entweder

$$\delta^*(y|S_\lambda) = +\infty$$

oder

$$\delta^*(y|S_\lambda) < \delta^*(y|S_\mu)$$

gilt.

f heißt M-regulär, falls f M-regulär bezüglich y für jedes $y \neq 0$ ist.

SATZ 3.7: Für beliebiges $f : R^n \to \bar{R}$ sind folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) f ist M-regulär bezüglich y;

(ii) f_q ist M-regulär bezüglich y;

(iii) $f_{\bar{q}}$ ist M-regulär bezüglich y

Beweis :

Seien

$$B_\lambda = \text{conv} S_\lambda, \qquad C_\lambda = \overline{\text{conv}} S_\lambda,$$

$$\widetilde{B}_\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} B_\mu, \qquad \widetilde{C}_\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} C_\mu.$$

Nach SATZ 1.8 sind $\{\widetilde{B}_\lambda\}_{\lambda \in R}$ und $\{\widetilde{C}_\lambda\}_{\lambda \in R}$ die Familien der Niveaumengen von f_q und $f_{\bar{q}}$. Es gilt (vgl. [16]):

$$\delta^*(y|S_\lambda) = \delta^*(y|B_\lambda) = \delta^*(y|C_\lambda). \tag{3.4}$$

Für $\lambda < \mu$ gilt

$$\widetilde{B}_\lambda \subseteq B_\lambda \subseteq B_\mu \quad \text{und} \quad \widetilde{C}_\lambda \subseteq C_\lambda \subseteq C_\mu$$

Wir zeigen: (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Seien $\lambda, \mu \in R$ so gewählt, daß

$$\inf f(x) = m < \lambda < \mu < M$$

erfüllt ist.

Im Fall $\delta^*(y|S_\lambda) = +\infty$ ist nichts zu beweisen. Sei $\delta^*(y|S_\lambda) < +\infty$. Sei weiter $\lambda < \nu < \mu$. Wegen (3.4) gilt dann

$$\delta^*(y|B_\lambda) \leq \delta^*(y|S_\nu) \leq \delta^*(y|S_\mu) \leq \delta^*(y|B_\mu).$$

Nach Voraussetzung gilt entweder

$$\delta^*(y|S_\nu) = +\infty$$

oder

$$\delta^*(y|S_\nu) < \delta^*(y|S_\mu).$$

In diesen beiden Fällen hat man

$$\delta^*(y|\widetilde{B}_\lambda) < \delta^*(y|\widetilde{B}_\mu).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Der Beweis ergibt sich wie oben, indem man einfach $\widetilde{B}_\nu$ durch $\widetilde{C}_\nu$ und S_ν durch B_ν ersetzt.

(iii) $\Longrightarrow$ (i).

Wir dürfen wieder $\delta^*(y|S_\lambda) < +\infty$ annehmen, wobei $m < \lambda < \nu < \mu < M$ sein möge. Wegen (3.4) erhalten wir

$$\delta^*(y|S_\lambda) \leq \delta^*(y|\widetilde{C}_\nu) \leq \delta^*(y|\widetilde{C}_\mu) \leq \delta^*(y|S_\mu),$$

und da entweder

$$\delta^*(y|\widetilde{C}_\nu) = +\infty$$

oder

$$\delta^*(y|\widetilde{C}_\nu) < \delta^*(y|\widetilde{C}_\mu).$$

gilt, es folgt

$$\delta^*(y|S_\lambda) < \delta^*(y|S_\mu).$$

□

SATZ 3.8: Sei $f : R^n \to \bar{R}$ quasikonvex und M-regulär. Dann gilt:

(i) $\lambda > \inf f(x) \Longrightarrow \operatorname{int} S_\lambda \neq \emptyset$;

(ii) $f(x) < M \Longrightarrow f$ ist oberhalbstetig in x.

Beweis :

(i)

Sei $\mathcal{N}_\lambda = \text{aff} S_\lambda$; dann genügt es zu zeigen $\mathcal{N}_\lambda = R^n$. Nach Voraussetzung ist $S_\lambda \neq \emptyset$, also auch $\mathcal{N}_\lambda \neq \emptyset$.

Angenommen, es gilt $\mathcal{N}_\lambda \subset R^n$;

dann existieren $y \neq 0$ und $\alpha \in R$ mit

$$(y, x) = \alpha, \qquad \forall x \in \mathcal{N}_\lambda.$$

Sei μ derart gewält, daß

$$\inf f(x) < \mu < \lambda$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$(y, x) = \alpha, \qquad \forall x \in \mathcal{N}_\mu,$$

und deshalb

$$\delta^*(y|S_\mu) = \delta^*(y|S_\lambda) = \alpha < +\infty.$$

Da dies der M-Regularität von f widerspricht, gilt $\mathcal{N}_\lambda = R^n$ und somit

$\text{int} S_\lambda = \text{ri} S_\lambda \neq \emptyset$.

(ii)

Sei $f(x) < \lambda < M$. Es genügt offenbar $x \in \text{int} S_\lambda$ zu zeigen.

Sei $x \notin \text{int} S_\lambda$.

Da $\text{int} S_\lambda$ eine offene nichtleere konvexe Menge ist, existiert nach einem bekannten Trennungssatz (vgl. [17]) ein $y \neq 0$ mit

$$\delta^*(y|S_\lambda) = \sup_w \{(y, w) | w \in \text{int} S_\lambda\} \leq (y, x).$$

Sei $f(x) = \mu$ und folglich $x \in S_\mu$.

Dann gilt

$$\delta^*(y|S_\lambda) \geq \delta^*(y|S_\mu) \geq (y, x).$$

und mithin

$$\delta^*(y|S_\lambda) = \delta^*(y|S_\mu) < \infty,$$

im Widerspruch zur M-Regularität von f. $\square$

SATZ 3.9: $f : R^n \to \bar{R}$ sei M-regulär bezüglich y.

Gilt $q_f^C(x, y) < M$ oder $f(x) \leq M$, so folgt

$$q_f^C(x, y) = q_f^G(x, y).$$

Beweis :

Es gilt stets (vgl. SATZ 3.5)

$$q_f^C(x, y) \leq q_f^G(x, y) \leq f(x). \tag{3.5}$$

Sei $q_f^C(x, y) < M$, und es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß gilt:

$$q_f^C(x, y) + 2\varepsilon < M.$$

Aus der Definition von q_f^C folgt dann

$$\sup_w \{(w - x, y) | f(x) \leq q_f^C(x, y) + \varepsilon\} \geq 0.$$

Wegen der M-Regularität von f gilt:

$$\sup_w \{(w - x, y) | f(x) \leq q_f^C(x, y) + 2\varepsilon\} > 0.$$

Folglich existiert ein v mit

$$f(v) \leq q_f^C(x, y) + 2\varepsilon, \quad (v - x, y) \geq 0;$$

zusammen mit DEFINITION 3.1 ergibt das

$$q_f^G(x, y) \leq q_f^C(x, y) + 2\varepsilon.$$

Sei $q_f^C(x, y) \geq M$ aber $f(x) \leq M$.

Dann haben wir wegen (3.5)

$$q_f^C(x, y) = q_f^G(x, y) = f(x).$$

□

FOLGERUNG 3.10: Sei $f : R^n \to \bar{R}$ M-regulär. Dann gilt:

(i) $f_{\bar{q}}$ ust stetig für alle x mit $f_{\bar{q}}(x) < M$;

(ii) $q_f^C(x, y) = q_f^G(x, y)$ für alle $y \in R^n$ und alle x mit $f(x) \leq M$;

(iii) $f^{GG}(x) = f_q(x)$ für alle x mit $f(x) \leq M$;

Beweis :

(i) folgt aus SATZ 3.7 (iii) und SATZ 3.8.

(ii) folgt aus SATZ 3.9.

(iii) folgt aus (ii) unter Berücksichtigung von SATZ 3.2 (v) und SATZ 3.4 (v).
□

Unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen an f ist die M-Regularität auch notwendig für die Gleichheit von q_f^G und q_f^C.

SATZ 3.11: Seien $f : R^n \to \bar{R}$ oberhalbstetig für alle x mit $f(x) < M$ und $y \neq 0$.

Gilt $q_f^C(x,y) < M \quad \Longrightarrow \quad q_f^C(x,y) = q_f^G(x,y)$, so ist f M-regulär bezüglich y.

Beweis :

Angenommen, f ist nicht M-regulär bezüglich y.

Dann existieren $\lambda, \mu \in R$ mit

$$\inf f(x) < \lambda < \mu < M \qquad \text{und} \qquad \delta^*(y|S_\lambda) = \delta^*(y|S_\mu) < \infty.$$

Für κ mit $\lambda < \kappa < \mu$ folgt daher

$$\delta^*(y|S_\kappa) = \delta^*(y|S_\lambda) = \delta^*(y|S_\mu) = A < \infty.$$

a) Es existiere ein $x \in S_\kappa$ mit $(x.y) = A$. Nach Voraussetzung existiert eine konvexe Umgebung V von x, so daß $f(w) \leq \mu$ auf V gilt.

Wegen $x \in V$ und $y \neq 0$ gilt

$$(x,y) = A < \sup\{(w,y)|w \in V\} \leq \delta^*(y|S_\mu).$$

Das ist ein Widerspruch.

b) Im anderen Fall gilt

$$(x,y) = A \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > \kappa.$$

Sei x derart, daß $(x,y) = A$ gilt.

Dann ist einerseits

$$q_f^G(x,y) = \inf_w\{f(w)|(w-x,y) \geq 0\} \geq \kappa$$

und andererseits

$$q_f^C(x,y) = \inf\{\nu | \delta^*(y|S_\nu) \geq (x,y)\} \leq \lambda,$$

was ein Widerspruch ist. $\square$

BEMERKUNG 3.12: Die Aussage des SATZes 3.11 ist nicht mehr richtig, wenn f nicht oberhalbstetig ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $f : R \to R$ gegeben durch :

$$f(x) = \begin{cases} x, \quad \text{fr} & x \leq 0 \\ 1+x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$q_f^G(x,1) = q_f^C(x,1) = f(x), \qquad \forall x \in R,$$

und dennoch

$$\delta^*(1|S_0) = \delta^*(1|S_{\frac{1}{2}}).$$

3 Das Quasisubdifferential und das Tangential

Das Subdifferential einer eigentlichen konvexen Funktion kann man folgendermaßen erklären (vgl. [16]):

$$\partial f(x) := \{y|(y,x) - f^*(y) = f(x)\}.$$

In Analogie dazu können mit Hilfe der Quasikonjugierten zwei neue Subdifferenzierbarkeitsbegriffe eingeführt werden.

DEFINITION 4.1: Sei $f : R^n \to \bar{R}$.

y heißt Quasisubgradient von f an der Stelle x, falls gilt:

$$q^G f(x,y) = f(x).$$

Die Menge der Quasisubgradienten von f an der Stelle x heißt Quasisubdifferential von f an der Stelle x, und wird durch $\partial^G f(x)$ bezeichnet. f heißt quasisubdifferenzierbar in x falls

$$\partial^G f(x) \neq \emptyset.$$

SATZ 4.2: $f : R^n \to \bar{R}$ sei quasisubdifferenzierbar in x. Dann gilt:

(i) $y \in \partial^G f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) + f^G_{(x,y)}(y) = (x,y)$;

(ii) $\partial^G f(x) = \{y|(w,y) \geq (x,y) \Longrightarrow f(w) \geq f(x)\}$;

(iii) $\partial f(x) \subseteq \partial^G f(x)$;

(iv) $\lambda \partial^G f(x) = \partial^G(\lambda f)(x) = \partial^G f(x)$ für $\lambda > 0$;

(v) $\partial^G f(x)$ ist ein konvexer Kegel (eventuell punktiert);

(vi) $0 \in \partial^G f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \inf f(w)$;

(vii) $\partial^G f(x) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f^{GG}(x)$;

(viii) $f(x) = f^{GG}(x) \quad \Longrightarrow \quad \partial^G f(x) = \partial^G f^{GG}(x)$.

Beweis :

(i) Es bestehen folgende leicht einzusehende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & f(x) + f^G_{(x,y)}(y) = (x,y) \\ \Longleftrightarrow\ & f(x) + (x,y) - \inf_w \{f(w)|(w,y) \geq (x,y)\} = (x,y) \\ \Longleftrightarrow\ & f(x) = \inf_w \{f(w)|(w,y) \geq (x,y)\} = q^G_f(x,y) \\ \Longleftrightarrow\ & y \in \partial^G f(x). \end{aligned}$$

(ii) Die Bedingung $(w,y) \geq (x,y) \Longrightarrow f(w) \geq f(x)$ ist äquivalent zu

$$f(x) = \inf_w \{f(w) | (w,y) \geq (x,y)\}.$$

(iii) Es gilt $y \in \partial f(x) \Longrightarrow f(w) - f(x) \geq (w-x,y)$,
und daraus folgt nach (ii) $y \in \partial^G f(x)$.

(iv) folgt aus (i) und SATZ 2.3 (ii).

(v) Nach (iv) ist $\partial^G f(x)$ ein Kegel und es genügt zu zeigen:

$$y_1, y_2 \in \partial^G f(x) \Longrightarrow y_1 + y_2 \in \partial^G f(x).$$

Da $q_f^G(x,\cdot)$ quasikonkav ist (vgl. SATZ 3.2 (iii)), gilt

$$q_f^G(x, y_1+y_2) \geq \min\{q_f^G(x,y_1), q_f^G(x,y_2)\} = f(x),$$

und wegen (vgl. DEFINITION 3.1)

$$q_f^G(x, y_1+y_2) \leq f(x)$$

folgt die Behauptung.

(vi) folgt unmittelbar aus der Definition.

(vii) Es gilt offenbar

$$\hat{y} \in \partial^G f(x) \Longrightarrow q_f^G(x,\hat{y}) = f(x) \Longrightarrow f^{GG}(x) = \sup_y q_f^G(x,y) \geq f(x),$$

und zusammen mit SATZ 2.5 (iii) folgt

$$f^{GG}(x) = f(x).$$

(viii) folgt aus SATZ 3.2 (iv). □

<u>**BEMERKUNG 4.3:**</u> In SATZ 4.2 (iii) kann auch die strenge Inklusion gelten:
Sei

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & \text{fr} \quad x \geq 0 \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\partial f(0) = \emptyset$, aber $\partial^G f(0) = (-\infty, 0)$.

Vermöge der C-Quasikonjugierten kann man einenn weiteren Typ von Subdifferenzierbarkeit einführen (vgl. [6]).

DEFINITION 4.4: Wir sagen, daß y zum Tangential $Tf(x)$ von f ($f : R^n \to \bar{R}$) an der Stelle x gehört, falls gilt:

$$q_f^C(x, y) = f(x).$$

Es besteht folgender Zusammenhang:

SATZ 4.5: Seien $f : R^n \to \bar{R}$, $x \in R^n$. Dann gilt:

$$\partial f(x) \subseteq Tf(x) \subseteq \partial^G f(x).$$

Beweis :

Es gilt

$$y \in \partial f(x) \Longrightarrow f(w) - f(x) \geq (w - x, y).$$

Für alle λ mit $\lambda < f(x)$ haben wir dann

$$\sup_w \{(w - x, y) | f(w) \leq \lambda\} \leq \sup_w \{f(w) - f(x) | f(w) \leq \lambda\} = \lambda - f(x) < 0.$$

Daraus folgt

$$q_f^C(x, y) = \inf\{\mu | \sup_w \{(w - x, y) | f(w) \leq \mu\} \geq 0\} > \lambda,$$

d.h.

$$q_f^C(x, y) \geq f(x).$$

Es gilt offenbar $q_f^C(x, y) \leq f(x)$, und mithin

$$y \in Tf(x).$$

Sein nun $y \in Tf(x)$, d.h. $q_f^C(x, y) = f(x)$.

Wegen

$$q_f^C(x, y) \leq q_f^G(x, y) \leq f(x).$$

folgt dann

$$q_f^G(x,y) = f(x) \quad \text{d.h.} \quad y \in \partial^G f(x).$$

□

<u>SATZ 4.6:</u> Sei $Tf(x)$ das Tangential von $f : R^n \to \bar{R}$ an der Stelle x . Dann gilt:

(i) $Tf(x)$ ist ein konvexer Kegel (eventuell punktiert);

(ii) $0 \in Tf(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \inf_w f(w)$;

(iii) $Tf(x) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f_{\bar{q}}(x)$;

(iv) $f(x) = f_{\bar{q}}(x) \quad \Longrightarrow \quad Tf(x) = Tf_{\bar{q}}(x)$.

<u>Beweis :</u>

(i) ist eine einfache Folgerung aus SATZ 3.4 (i), (iii).

(ii) folgt aus der Definition von $Tf(x)$.

(iii) Es gilt offenbar

$$\hat{y} \in Tf(x) \Longrightarrow f(x) = q_f^C(x,\hat{y}) \Longrightarrow f_{\bar{q}}(x) = f^{CC}(x) = \sup_y q_f^C(x,y) \geq f(x).$$

Dei Behauptung ergibt sich jetz aus DEFINITION 1.9.

(iv) folgt aus dem SATZ 3.4 (iv). □

<u>SATZ 4.6a:</u> Seien $f : R^n \to \bar{R}$ eigentlich und konvex,

$x_0 \in R^n$ mit $f(x_0) \neq \inf_x f(x)$ und $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Sei $K := \{y | \exists \lambda > 0 \quad \text{mit} \quad \lambda y \in \partial f(x_0)\}$.

Dann gilt:

$$\overline{K} = \overline{Tf(x_0)} = \overline{\partial^G f(x_0)}.$$

Falls f stetig in x_0 ist, gilt sogar

$$K = Tf(x_0) = \partial^G f(x_0).$$

<u>Beweis :</u>

Seien

$$\mathcal{A} := \{x | f(x) < f(x_0)\}$$
$$\mathcal{B} := \{x | f(x) \leq f(x_0)\}$$
$$\mathcal{C} := \{y | (x - x_0, y) \leq 0, \quad x \in \mathcal{B}\}.$$

Sei $y \in \partial f(x_0)$. Dann gilt

$$f(x_0) \leq f(x) - (x - x_0, y), \quad \forall x \in R^n,$$

und, da f eigentlich ist, $f(x_0)$ ist endlich.

Offenbar ist $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Für $x \in \mathcal{A}, \quad y \in \mathcal{B}, \quad t \in (0,1)$ ergibt sich

$$f(y + t(x - y)) \leq (1 - t)f(y) + tf(x) < f(x_0).$$

Das bedeutet

$$y - t(x - y) \in \mathcal{A}, \qquad \forall t \in (0,1).$$

Da $\mathcal{A}$ konvex ist, folgt $y \in \overline{\mathcal{A}}$ und somit $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$

Weil ja ohnehin $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt, muß $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}}$ sein. Somit gilt

$$\mathcal{C} = \{y | (x - x_0, y) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{A}\}$$

also

$$\mathcal{C} \supseteq \partial^G f(x_0).$$

Andererseits gilt nach Satz 23.7 aus [16] $\overline{K} = \mathcal{C}$, und, falls f stetig in x_0 ist, $\mathcal{C} = K \bigcup \{0\}$. $\square$

SATZ 4.7: Sei $f : R^n \to \bar{R}$ eine quasikonvexe Funktion.

(i) Sei $y \neq 0$. Wenn für alle x, für welche $f(x) < f(x_0)$ und $(x - x_0, y) = 0$ gilt, ein $d \in R^n$ derart existiert, daß f oberhalbstetig in x bezüglich d ist, und darüberhinaus $(d, y) > 0$ gilt , so ist $q_f^G(x_0, \cdot)$ oberhalbstetig in y.

(ii) Gelten die Voraussetzungen von (i) für alle $y \neq 0$, so ist $\partial^G f(x_0) \neq \emptyset$. Wenn außerdem $f(x_0) \neq \inf_x f(x)$ erfüllt ist, gilt

$$\partial^G f(x_0) = \{y | y \neq 0, \quad \sup_x \{(x - x_0, y) | f(x) < f(x_0)\} \geq 0\}.$$

Beweis :

(i) Falls $q_f^G(x_0, y) = f(x_0)$ gilt, so hat man

$$\sup_z q_f^G(x_0, z) = f^{GG}(x_0) = f(x_0) = q_f^G(x_0, y),$$

und $q_f^G(x_0, \cdot)$ ist oberhalbstetig in y.

Sei nun $q_f^G(x_0,y)+\varepsilon < f(x_0)$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$. Aus der Definition von q_f^G folgt, daß ein x existiert, so daß gilt

$$f(x) \leq q_f^G(x_0,y)+\varepsilon \qquad \text{und} \qquad (x-x_0,y) \geq 0.$$

Ist $(x-x_0,y) > 0$, so setzen wir $\bar{x} = x$.

Ist $(x-x_0,y) = 0$, so existiert ein d mit $(d,y) > 0$, so daß f oberhalbstetig in x bezüglich d ist, d.h.

$$f(x+td) \leq q_f^G(x_0,y)+\varepsilon \qquad \forall t \in [0,t_0].$$

Mit $\bar{x} = x+td$ haben wir dann

$$f(\bar{x}) \leq q_f^G(x_0,y)+\varepsilon \qquad \text{und} \qquad (\bar{x}-x_0,y) \geq 0.$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes existiert eine Umgebung V von y mit $(\bar{x}-x_0,v) \geq 0$ für alle $v \in V$, und wir erhalten

$$q_f^G(x_0,v) \leq f(\bar{x}) \leq q_f^G(x_0,y)+\varepsilon \qquad \forall v \in V.$$

(ii) Seien

$$\mathcal{A} := \{x | f(x) < f(x_0)\}$$
$$\mathcal{B} := \{y | \sup\{(x-x_0,y) | \quad x \in \mathcal{A}\} \leq 0\}.$$

Ist $\mathcal{A} = \emptyset$, so gilt $\partial^G f(x_0) = R^n$.

Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Dann können x_0 und $\mathcal{A}$ durch ein nicht identisch verschwindendes lineares Funktional getrennt werden, d.h. es existiert ein $y \neq 0$ mit

$$(y,x) \leq (y,x_0), \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Das bedeutet $y \in \mathcal{B}$ und mithin $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Es ist leicht einzusehen, daß $\mathcal{B} \supseteq \partial^G f(x_0)$ gilt.

Wir zeigen $\mathcal{B} \subseteq \partial^G f(x_0)$. Sei $y \in \mathcal{B}$ und $y \neq 0$.

Ist $q_f^G(x_0,y) = f(x_0)$ so gilt $y \in \partial^G f(x_0)$.

Sei $q_f^G(x_0,y) < f(x_0)$. Dann existiert ein x mit

$$(x-x_0,y) \geq 0 \quad \text{und} \quad f(x) < f(x_0).$$

Wegen $y \in \mathcal{B}$ folgt $(x-x_0,y) = 0$.

Nach Voraussetzung existiert ein d mit

$$(y,d) > 0 \quad \text{und} \quad f(x+td) < f(x_0), \quad \forall t \in [0,t_0].$$

Mit $\bar{x} = x_0 + t_0 d$ hat man $\bar{x} \in \mathcal{A}$, und es gilt

$$(\bar{x} - x_0, y) = t_0(d,y) > 0$$

im Widerspruch zu $y \in \mathcal{B}$.

Weil stets $q_f^G(x_0,y) \leq f(x_0)$ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

FOLGERUNG 4.8: $f : R^n \to \bar{R}$ sei quasikonvex und oberhalbstetig in jedem x, für welches $f(x) < f(x_0)$ gilt.

Dann ist

(i) $q_f^G(x_0,y)$ oberhalbstetig für alle $y \neq 0$;

(ii) $\partial^G f(x_0) \neq \emptyset$ und $f^{GG}(x_0) = f(x_0)$.

Beweis :

Die Voraussezungen des SATZes 4.7 sind für $d = y$ offenbar erfüllt.

FOLGERUNG 4.9: Sei $f : R^n \to \bar{R}$ M-regulär und $f(x_0) \leq M$.

Dann gilt:

(i) $f_{\bar{q}}(x_0) = f^{GG}(x_0) = f_q(x_0)$;

(ii) Die C-Quasikonjugierte und die G-Quasikonjugierte von f bezüglich x_0 sind identisch und oberhalbstetig für jedes $y \neq 0$;

(iii) Falls f quasikonvex ist, so gilt

$f(x_0) = f_{\bar{q}}(x_0)$ und $Tf(x_0) = \partial^G f(x_0) \neq \emptyset$.

Wenn darüberhinaus gilt $f(x_0) < M$, so ist f stetig in x_0.

Beweis :

(i) f_q ist M-regulär (vgl. SATZ 3.7 (ii)), daher ist f_q oberhalbstetig für alle x mit $f_q < M$ (vgl. SATZ 3.8 (ii)).

Indem man SATZ 2.7 (iii), FOLGERUNG 3.10 (iii) und FOLGERUNG 4.8 auf f_q anwendet, erhält man die Behauptung.

(ii) Wird FOLGERUNG 3.10 (ii), SATZ 3.2 (iv), FOLGERUNG 4.8, sowie SATZ 3.4 (iv) auf f_q angewandt, ergibt sich die Ausssage.

(iii) Nach (i) gilt

$$f_{\bar{q}}(x_0) = f_q(x_0) = f(x_0) \tag{4.1}$$

Da $q_f^G \equiv q_f^C$ gilt, hat man $Tf(x_0) = \partial^G f(x_0)$, und gemäß FOLGERUNG 4.8 sind diese Mengen nichtleer. Wegen (4.1) und SATZ 1.11 ist f unterhalbstetig in x_0.

Falls $f(x_0) < M$ gilt, ist nach SATZ 3.8 f oberhalbstetig in x_0. Folglich ist f stetig in x_0.

□

4 Eine Beziehung zur φ-Konjugation

In den Arbeiten von VOGEL [20], WEISS [21], ELSTER/NEHSE [8], BALDFER [1], LINDBERG [13], SEIDLER [19], SCHRADER [18], sowie KUTATELADSE/RUBINOW [12] wurde ein sehr allgemeines Konzept für die Dualität geschaffen, das fast alle bisher bekannten Verallgemeinerungen zu umfassen scheint.

Seien X und Y zwei beliebige Mengen und sei $\varphi : X \times Y \to \bar{R}$.

Für $f : X \to \bar{R}$ betrachten wir Minoranten der Art $\varphi(\cdot, y) - \mu$, und es sei

$$m(f) := \{(y, \mu) \in Y \times R | \varphi(x, y) - \mu \leq f(x), \quad \forall x \in X\}.$$

Man verifiziert leicht folgende Eigenschaften:

(i) $(y, \mu) \in m(f) \Longrightarrow (y, \lambda) \in m(f), \qquad \forall \lambda > \mu;$

(ii) $(y, \mu_n) \in m(f), \qquad \mu_m \to \mu \Longrightarrow (y, \mu) \in m(f).$

Somit ist $m(f)$ der Epigraph einer Funktion $f^\varphi : Y \to \bar{R}$, der sogennannten φ-Konjugierten von f. Man rechnet leicht nach:

$$\begin{aligned} f(y) &= \inf\{\mu | (y, \mu) \in m(f)\} \\ &= \inf\{\mu | \varphi(x, y) - \mu \leq f(x), \quad \forall x \in X\} \\ &= \sup_x \{\varphi(x, y) - f(x)\} \end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$f(x) + f^\varphi(y) \geq \varphi(x, y) \qquad (\mathrm{YOUNG'scheUngleichung}),$$

$$f^{\varphi\varphi}(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in X.$$

Falls $f^{\varphi\varphi}(x) = f(x)$ gilt, so nennt man die Funktion φ-regulär in x.

Es ist wichtig, daß gewisse Eigenschaften von f^φ durch entsprechende Eigenschaften von φ allein gesichert werden. Insbesondere gilt (vgl. [8])

$\varphi(x, \cdot)$ konvex $(\forall x \in X) \Longrightarrow f^\varphi$ konvex;

$\varphi(x, \cdot)$ quasikonvex $(\forall x \in X) \Longrightarrow f^\varphi$ quasikonvex;

DEFINITION 5.1: $\varphi : X \times Y \to \bar{R}$ heißt scharf in x_0, wenn für alle $y \in Y$, alle Umgebungen U von x_0, alle $\mu \in R$ und $\varepsilon > 0$, ein $y_0 \in Y$ und eine Umgebung V vin x_0 mit $V \subseteq U$ derart existieren, daß gilt:

(i) $\varphi(x_0, y_0)$ ist endlich;

(ii) $\varphi(x, y_0) - \varphi(x_0, y_0) \leq \varphi(x, y) + \mu \quad \forall x \notin V;$

(iii) $\varphi(x, y_0) \leq \varphi(x_0, y_0) + \varepsilon \quad \forall x \in V$;

Diese Eigenschaft von φ sichert die φ-Regularität einer breiten Klasse von Funktionen (vgl. [1],[13]).

SATZ 5.2: Sei φ scharf in x_0. Jede Funktion f, die unterhalbstetig in x_0 ist und mindestens eine φ-Minorante besitzt, ist φ-regulär in x_0.

Beweis :

Falls $f(x_0) = -\infty$, gilt die Behauptung trivialerweise.

Seien nun $f(x_0) > -\infty$ und $\varepsilon > 0$.

Wegen der Unterhalbstetigkeit von f in x_0 gilt

$$f(x) \geq \alpha = \min\{f(x_0) - \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\}, \tag{5.1}$$

für alle x aus einer gewissen Umgebung U von x_0.

Sei $h' = \varphi(\cdot, \bar{y}) - \bar{\mu}$ die gegebene φ-Minorante von f.

Da φ scharf in x_0 ist, existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ uns ein y_0, so daß gilt:

$$\varphi(x, y_0) - \varphi(x_0, y_0) \leq \varphi(x, \bar{y}) - \alpha + \varepsilon - \bar{\mu}, \quad \forall x \notin V,$$

$$\varphi(x, y_0) \leq \varphi(x_0, y_0) + \varepsilon, \quad \forall x \in V.$$

Daher hat man

$$\varphi(x, y_0) - (\varphi(x_0, y_0) - \alpha + \varepsilon) \leq \varphi(x, \bar{y}) - \bar{\mu}, \quad \forall x \notin V, \tag{5.2}$$

$$\varphi(x, y_0) - (\varphi(x_0, y_0) - \alpha + \varepsilon) \leq \alpha, \quad \forall x \in V. \tag{5.3}$$

Seien $\mu_0 = \varphi(x_0, y_0) - \alpha + \varepsilon$ und $h'' = \varphi(\cdot, y) - \mu_0$. Offenbar gilt

$$h''(x_0) = \alpha - \varepsilon, \tag{5.4}$$

und zusammen mit (5.2) und (5.3) folgt

$$\begin{aligned} &h''(x) \leq \alpha \leq f(x), \quad \forall x \in V, \\ &h''(x) \leq h'(x) \leq f(x), \quad \forall x \notin V. \end{aligned}$$

Somit ist h'' eine Minorante von f, und wegen (5.1) und (5.4) gilt für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$:

$$f(x_0) = h''(x_0) + 2\varepsilon.$$

Daraus folgt, daß $f(x_0)$ das Supremum der Werte der φ-Minoranten von f an der >Stelle x_0 ist.

Mithin

$$f^{\varphi\varphi}(x_0) = \sup_y \{\varphi(x_0, y) - f^{\varphi}(y)\}$$

$$= \sup_{y,\mu} \{\varphi(x_0, y) - \mu | \mu \geq f^{\varphi}(y), \quad \mu \in R\}$$

$$= \sup_{y,\mu} \{\varphi(x_0, y) - \mu | (y, \mu) \in m(f)\} = f(x_0).$$

□

Die Allgemeinheit dieses Konzepts legt natürlich die Vermutung nahe, daß man bei geeigneter Wahl des Kopplungsfunktionals φ die Quasikonjugation hier einordnen kann. Dies ist im folgenden Sinn zu bejahen:

SATZ 5.3: Sei $f : R^n \to \bar{R}$. Es existiert stets ein $\varphi : R^n \times R^n \to \bar{R}$ derart, daß aus $f^{GG} = f(x)$ die φ-Regularität von f in x folgt.

Beweis :

Sei

$$\varphi(x, y) :) \inf_w \{f(w) | (w - x, y) \geq 0\} = q_f^G(x, y). \tag{5.5}$$

Aus $\varphi(x, y) \leq f(x), \quad \forall x, y \in R^n$, folgt

$$f^{\varphi}(y) = \sup_x \{\varphi(x, y) - f(x)\} \leq 0,$$

und weiter in Verbindung mit SATZ 3.2 (v)

$$f^{\varphi\varphi}(x) = \sup_y \{\varphi(x, y) - f^{\varphi}(y)\} \geq \sup_y \varphi(x, y) = f^{GG}(x). \tag{5.6}$$

Die Behauptung folgt nun wegen

$$f(x) \geq f^{\varphi\varphi}(x) \geq f^{GG}(x).$$

□

BEMERKUNG 5.4: Natürlich ist das in SATZ 5.3 gewählte Kopplungsfunktional nicht das einzig mögliche (vgl. Kap. 7). SATZ 5.3 ist nicht unbedingt eine Folgerung aus dem SATZ 5.2, denn nach BEMERKUNG 2.8 kann $f^{GG} = f(x)$ auch ohne die Unterhalbstetigkeit von f gelten.

BEMERKUNG 5.5: Das im SATZ 5.3 gewählte Kopplungsfunktional ist für kein f und kein $x \in R^n$ scharf.

Sei $x_0 \in R^n$ beliebig aber fest.

Angenommen, es existiert ein $f : R^n \to \bar{R}$, so daß $\varphi(x,y) = \inf_w\{f(w)|(w - x, y) \geq 0\}$ scharf in x_0 ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren gemäß DEFINITION 5.1 eine Kugel $U = S(x_0, r)$ und ein $\bar{y} \in R^n$ derart, daß gilt

$$\varphi(x,\bar{y}) \leq \varphi(x_0,\bar{y}) + \varepsilon, \quad \forall x \in U,$$

und

$$\varphi(x_0,\bar{y}) < \infty.$$

Mithin gilt $\sup \varphi(x,\bar{y}) < \infty$.

Zu $\bar{y}$, $S(x, \frac{r}{2})$ und $\mu < -\sup \varphi(x,\bar{y})$ existieren gemäß DEFINITION 5.1 ein $y_0 \in R^n$ und eine Umgebung $V \subseteq S(x, \frac{r}{2})$ von x_0 derart, daß gilt:

$$\varphi(x,y_0) - \varphi(x_0,y_0) \leq \varphi(x,\bar{y}) + \mu, \quad \forall x \notin V.$$

Jetzt sei $\bar{x}$ derart, daß $\bar{x} \in U \backslash V$ und $(\bar{x}, y_0) \geq (x_0, y_0)$ gilt.

Wegen $\bar{x} \notin V$ hat man

$$\varphi(\bar{x},y_0) - \varphi(x_0,y_0) \leq \varphi(\bar{x},\bar{y}) + \mu, \quad \forall x \notin V. \tag{5.7}$$

Es gilt weiter

$$\{w|(w,y_0) \geq (x_0,y_0)\} \supseteq \{w|(w,y_0) \geq (\bar{x},y_0)\},$$

und daher $\varphi(\bar{x},y_0) \geq \varphi(x_0,y_0)$.

Da $\varphi(x_0,y_0)$ endlich ist, erhalten wir

$$\varphi(\bar{x},y_0) - \varphi(x_0,y_0) \geq 0,$$

und mit (5.7) folgt dann

$$-\mu \leq \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq \sup_x \varphi(x,\bar{y}).$$

Das ist ein Widerspruch zur Wahl von μ. □

5 Verbindung zur H-Konvexität

Betrachten wir eine Abbildung $\varphi : U \times V \to \bar{R}$, wobei U und V beliebige Mengen sind.

DEFINITION 6.1: Seien $y \in V$ und $c \in R$. Dannheißt

$$H^{\varphi}_{(y,c)} = \{x \in U | \varphi(x,y) \leq c\}$$

der durch y und c bestimmte Halbraum in U.

DEFINITION 6.2: $C \subseteq U$ heißt φ-konvex, wenn gilt

$$C = \bigcup_{C \subset H^{\varphi}_{(y,c)}} H^{\varphi}_{(y,c)}.$$

Wir wollen zeigen, daß die H-Konvexität (vgl. [12]) zur oben definierten φ-Konvexität in gewissem Sinn äquivalent ist.

Sei y ein vollständiger Verband [3] mit dem kleinsten Element $-\infty$. Seien $H \subset X \subset Y$ und $-\infty \notin H$.

DEFINITION 6.3:

$p \in X$ heißt H-konvex, wenn $p = \sup S$ für irgendein $S \subseteq H$.

SATZ 6.4: Y sei ein vollständiger Verband, $H \subset X \subset Y$ und $-\infty \notin H$.

Es existieren eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P})Y)$, eine Bijektion $\kappa : Y \to \mathcal{F}$ und eine Abbildung $\varphi : X \times H \to \bar{R}$ derart, daß gilt:

$$p \in XH\text{--konvex} \Longleftrightarrow \kappa(p) \in \{\varphi\text{--konvex}.$$

Beweis :

Seien

[3] Gemeint ist eine halbgeordnete Menge, in welcher jede Teilmenge ein Supremum und ein Infimum besitzt. Das Element x' heoßt Supremum von X, falls $x' \geq x$ für alle $x \in X$, und aus $z \geq x$ für jedes $x \in X$, $z \geq x'$ folgt. Das Infimum ist entsprechend erklärt.

$$A_p := \{y \in Y | y \geq p\},$$
$$\mathcal{F} := \{A_p | p \in Y\}, \qquad \kappa(p) := A_p.$$

κ ist eine Bijektion, und es gilt

$$pgeqq \Longleftrightarrow \kappa(p) \subseteq \kappa(q). \tag{6.1}$$

Um das zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß κ nach Konstruktion surjektiv ist. Weiter gilt:

$$\inf A_p = p \tag{6.2}$$

Wäre nun $p \neq q$ und $A_p = A_q$, so hätte man nach (6.2) den Widerspruch $p = q$. Somit ist κ injektiv.

$p \geq q$ zieht offenbar $Ap \subseteq A_q$ nach sich.

Sei nun $Ap \subseteq A_q$. Dann gilt $\inf Ap \subseteq \inf A_q$, und wegen (6.2) $p \geq q$.

Somit ist (6.1) erfüllt, woraus folgt:

$$\kappa(\sup S\} = \bigcap_{s \in S} \kappa(s) = \sup \kappa(s),$$

$$\kappa(\inf S\} = \bigcup_{s \in S} \kappa(s) = \inf \kappa(s),$$

Sei jetzt $\varphi : X \times H \to \bar{R}$ folgendermaßen definiert:

$$\varphi(x, v) = \begin{cases} -\infty & \text{fr} \qquad x \in \kappa(v), \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$H^{\varphi}_{(y,c)} = \kappa(y).$$

Sei nun $p \in X$ H-konvex. Dann existiert ein $S \subseteq H$ mit $p = \sup S$. Mithin hat man

$$\kappa(p) = \bigcap_{s \in S} \kappa(s) \quad \bigcap_{(s,c) \in S \times R} H^{\varphi}_{(s,c)},$$

d.h. $\kappa(p)$ ist φ-konvex.

Sei $\kappa(p)$ ist φ-konvex. Dann gilt

$$\kappa(p) = \bigcap_{(s,c)\in\Gamma} H^{\varphi}_{(s,c)}$$

für geeignetes $\Gamma \subseteq H \times R$.

Mithin hat man

$$\kappa(p) = \bigcap_{s\in \mathrm{pr}_1\Gamma} \kappa(s),$$

und folglich

$$p = \sup(\mathrm{pr}_1\Gamma).$$

Jetzt ergibt sich die H-Konvexität von p, weil es gilt:

$$\mathrm{pr}_1\Gamma \in H.$$

□

<u>BEMERKUNG 6.5:</u> Der Übergang von φ-konvexen Mengen zu φ-konvexen Funktionen vollzieht sich wie üblich über den Epigraphen:

Sei $\Phi(x,y,\gamma) = \varphi(x,y) - \gamma, \quad \gamma \in R$.

f heißt φ-konvex, wenn epi$f$ Φ-konvex ist.

Dies ist äquivalent zu φ-Regularität (vgl. Kap.5), denn es gilt (vgl. [18]):

$$f \quad \varphi\text{−konvex} \Longleftrightarrow f = f^{\varphi\varphi}.$$

6 Die Dualität quasikonvexer Probleme

Das Schema der Dualität konvexer Probleme nach ROCKAFELLAR und JOLY/LAURENT sei hier zunächsr kurz skizziert, da es als Vorbild dienen soll.

Seien $X = R^n, \quad U = R^m$ und $f : X \to \bar{R}$.

Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$(P) \qquad f(x) \to \min, \quad x \in X,$$

und nennen es Primalproblem.

Sei $\alpha = \inf\{f(x)|x \in X\}$.

Sei $F : X \times U \to \bar{R}$ mit $F(x, 0) = f(x), \quad x \in X$.

$h(u) = \inf\{f(x)|x \in X\}$ heißt Empfindlichkeitsfunktional von (P).

Offenbar gilt $\alpha = h(0)$.

Die zweifache FENCHEL-Konjugierte h^{**} von h ist eine konvexe unterhalbstetige Funktion, und es gilt $h \geq h^{**}$.

$\beta = h^{**}(0)$ kann als Optimalwert eines konkaven Maximierungsproblem dargestellt werden, weil gilt:

$$\beta = \sup_{u^*}\{(0, u^*) - h^*(u^*)\} = \sup_{u^*}\{-h^*(u^*)\}.$$

$$(D) \qquad - h^*(u^*) \to \max, \quad u^* \in U,$$

heißt Dualproblem zu (P).

Es gilt

$$\beta = h^{**}(0) \leq h(0) = \alpha \qquad \text{(schwacherDualittssatz)}.$$

Ist h konvex und unterhalbstetig in 0, so gilt wegen $h^{**}(0) = h(0)$

$$\beta = \alpha \qquad \text{(starkerDualittssatz)}.$$

Ist $M = \{u^*|\beta = -h^*8u^*)\}$ die Lösungsmenge von (D), so gilt

$$M = \partial h^{**}(0).$$

Durch Verwendung von Quasikonjugierten bezüglich des Nullpunkts gelangt man zur Dualität für quasikonvexe Probleme (vgl. [4], [9]).

Sei

$$h_G(y) = q_h^G(0, y) = \inf_w\{h(w)|(w, y) \geq 0\}$$

die G-Konjugierte von h bezüglich 0 sowie

$$h_C(y) = q_h^C(0, y) = \inf\{\mu | \sup_w \{(w, y) | f(w) \leq 0\} geq 0\}$$

die C-Konjugierte von h bezüglich 0.

Wir formulieren folgende Maximierungsprobleme

$$(D_G) \qquad -h_G(u^*) \to \max, \quad u^* \in U,$$

$$(D_C) \qquad -h_C(u^*) \to \max, \quad u^* \in U,$$

Nach SATZ 3.2 (iii) und SATZ 3.4 (iii) stellen D_G und D_C zwei quasikonvexe Optimierungsprobleme dar.

Seien $\beta_G = \sup_{u^*} h_G(u^*)$ und $\beta_C = \sup_{u^*} h_C(u^*)$.

Es gilt folgende Dualitätsbeziehung (vgl. FOLGERUNG 2.14)

$$\beta = h^{**}(0) \leq \beta = h^{**}(0) \beta = h^{**}(0) \leq \alpha = h(0) \tag{7.1}$$

(schwacher Dualitätssatz für (P), (D_G), (D_C) und (D)).

Sei M_G bzw. M_C die Lösungsmenge von (D_G) bzw. (D_C).

SATZ 7.1: Es gilt

(i) $M_G = \partial^G h^{GG}(0)$ und $M_C = Th^{CC}(0)$;

(ii) $\beta_G = \alpha \implies M_G = \partial^G h(0)$;

(iii) $\beta_C = \alpha \implies M_C = Th(0)$;

Beweis :

(i) folgt aus SATZ 3.2 (iv) und SATZ 3.4 (iv). (ii) und (iii) folgen entsprechend aus SATZ 4.2 (viii) und SATZ 4.6 (iv).

□

SATZ 7.2 (starker Dualitätssatz): Das Empfindlichkeitsfunktional h sei quasikonvex.

(i) Falls für jedes $u^* \neq 0$ und für jedes u mit $h(u) < \alpha$ und $(u, u^*) = 0$, ein d mit $(d, u^*) > 0$ derar existiert, daß h oberhalbsstetig in u bezüglich d ist, so gilt: $\alpha = \beta_G$, h_G ist oberhalbstetig in jedem $u^* \neq 0$, und wenn außerdem h sein Minimum in 0 nicht erreicht, gilt weiter $M_G = \{u^* \neq 0 | \sup_u \{(u, u^*) | h(u) \leq \alpha\} \leq 0\}$;

(ii) Ist h unterhalbstetig in 0, so gilt

$$\alpha = \beta_G = \beta_C.$$

(iii) Ist h M-regulär mit $M \geq \alpha$, so gilt

$$\alpha = \beta_C.$$

h_G und h_C sind identisch und oberhalbstetig für jedes $u^* \neq 0$;

h ist unterhalbstetig in 0, $M_G = M_C \neq \emptyset$;

gilt außerdem noch $\alpha < M$, so ist h stetig in 0,

Beweis :

(i) folgt aus dem SATZ 4.7 (ii).

(ii) folgt aus SATZ 1.11 und SATZ 2.11.

(iii) ist einfach FOLGERUNG 4.9 für den Fall $f = h$, $x_0 = 0$. □

BALDER [1] gibt eine Erweiterung der Konstruktion der konvexen Dualität für nichtkonvexe Probleme mit Hilfe von φ-Konjugation an.

Wir benützen zunächst ein beliebiges Kopplungsfunktional

$$\psi : U \times V to \bar{R} \qquad \text{mit} \qquad \psi(0, y), \quad y \in V,$$

und erhalten als Dualproblem zu (P):

$$(D_\psi) \qquad - h^\psi(u^*) \to \max, \quad u^* \in U.$$

Für $\beta_\psi = \sup_{u^*}\{-h^\psi(u^*)\}$ gilt offenbar

$$\beta_\psi = h^{\psi\psi}(0) \leq h(0) = \alpha \qquad\qquad (\text{schwacherDualittssatz}).$$

Für den Fall, daß h beschränkt ist, wählen wir

$$\psi(x, y) = q_h^G(x, y) - q_h^G(0, y). \tag{7.2}$$

Dann gilt (vgl. (5.5))

$$\begin{aligned} h^{\psi\psi}(x) &= \sup_y\{\psi(x, y) - \sup_w\{\psi(w, y) - h(w)\}\} \\ &= \sup_y\{q_h^G(x, y) - \sup_w\{q_h^G(w, y) - h(w)\}\} \\ &= h^{\varphi\varphi}(x). \end{aligned}$$

Somit läßt sich (5.6) wie folgt schreiben:

$$h^{\psi\psi}(x) \geq h^{GG}(x)$$

und die Dualitätsbeziehung (7.1) bekommt die Gestalt:

$$\beta = h^{**}(0) \leq \beta_C = h^{CC}(0) \leq \beta_G = h^{GG}(0) \leq \beta_\psi = h^{\psi\psi}(0) \leq \alpha = h(0).$$

Wählen wir andererseits

$$\psi_1(x,y) = \begin{cases} 0 \quad \text{fr} & (x,y) \geq 0, \\ -\infty, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{7.3}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} h^{\psi_1}(y) &= \sup_x \{\psi_1(x,y) - h(x)\} \\ &= -\inf_x \{h(x) | (x,y) \geq 0\} \\ &= -h_G(y), \quad h^{\psi_1\psi_1}(0) = \sup_y \{-h^{\psi_1}(y)\} = h^{GG}(0) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_\varphi(x,y) = \sup_u \{\varphi(u,y) - F(x,u)\}$ heißt verallgemeinerte LAGRANGE-Funktion für das Problem (P).

Insbesondere hat man

$$\mathcal{L}_{\psi_1}(x,y) = \sup_u \{-F(x,u) | (u,y) \geq 0\}. \tag{7.4}$$

Folglich gilt der bekannte Zusammenhang zwischen Dualitätssätzen und Sattelpunktsätzen (vgl. [13],[18]) auch für das Dualpaar $(P) - (D_G)$ mit der verallgemeinerten LAGRANGE-Funktion (7.4).

7 Hinreichende Bedingungen für quasikonvexe Probleme

Es seien $X = R^n, \quad U = R^m$ und $f : X \to \bar{R}$.

$(P), F, h, h_G$ seien definiert wie im Kap. 7.

CARATHEODORY [3] hat zur Herleitung von hinreichenden Bedingungen für klassische Variationsprobleme gewisse K-Funktione benützt. In [10] ist diese Methode weitgehend auf Optimierungsprobleme angewandt worden. Im Folgenden werden unter Verwendung von Quasikonjugation entsprechende Resultate für quasikonvexe Optimierungsprobleme bewiesen.

DEFINITION 8.1: Die Funktion $c : X \to \bar{R}$ heißt K-Funktion von (P) in x_0, falls gilt:

(i) $f(x_0) = c(x_0)$,

(ii) $c(x) = c(x_0) \qquad \forall x \in \mathrm{dom} f$,

(iii) $f(x) \geq c(x) \qquad \forall x \in X$.

SATZ 8.2: Existiert eine K-Funktion von (P) in x_0, so ist x_0 eine Lösung von (P) !

Beweis :

Definitionsgemäß gilt

$$f(x) - f(x_0) \geq c(x) - c(x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in X.$$

□

Es is klar: wenn c K-Funktion von (P) in x_0 ist, so ist sie es auch in jeder anderen Lösung von (P). Deshalb spricht man einfach von der K-Funktion von (P).

Für Optimierungsprobleme mit quasikonvexer Empfindlichkeitsfunktion erhalten wir:

SATZ 8.3: Die Empfindlichkeitsfunktion von (P) sei quasikonvex. Folgende Asussagen sind äquivalent:

(i) x_0 ist eine Lösung von (P) und $y \in \partial^G h(0)$;

(ii) $c(x) := f(x) + f(x_0) - \inf_w \{F(x,w) | (w,y) \geq 0\}$ ist eine K-Funktion von (P) in x_0.

Beweis :

Sei $\mathcal{W}(x) = \inf_w\{F(x,w)|(w,y) \geq 0\}$.

Es gilt (vgl. Kap. 7)

$$h_G(y) = \inf_w\{h(w)|(w,y) \geq 0\}$$

$$\inf_w\{\inf_x F(x,w)|(w,y) \geq 0\}$$

$$\inf_w \inf_x\{F(x,w)|(w,y) \geq 0\}$$

$$\inf_x \mathcal{W}(x)$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Wegen SATZ 8.2 ist x_0 eine Lösung von (P).

Da c eine K-Funktion von (P) ist, gilt weiter:

$$\mathcal{W}(x) = f(x) - c(x) + f(x_0) \geq f(x_0) = h(0) \quad \forall x \in X,$$

und mithin

$$h_G(y) = \inf_x \mathcal{W}(x) \geq h(0).$$

Da stets $h_G(y) \leq h(0)$ gilt, erhalten wir

$h_G(y) \leq h(0)$, d.h. $y \in \partial_G h(0)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Für $y \in \partial_G h(0)$ folgt

$$h(0) = h_G(y) = \inf_x \mathcal{W}(x). \tag{8.1}$$

Daher gilt

$$h(0) = \leq \mathcal{W}(x_0) \leq F(x_0, 0) = f(x_0) = h(0) \tag{8.2}$$

und somit

$$c(x_0) = f(x_0) + h(0) - h(0) = f(x_0) \tag{8.3}$$

Weiter hat man gemäß (8.1)

$$c(x) - f(x) = f(x_0) + \mathcal{W}(x) \leq h(0) - \inf_x \mathcal{W}(x) = 0 \tag{8.4}$$

und außerdem wegen (8.2)

$$\begin{aligned} c(x) - c(x_0) &= f(x) - \mathcal{W}(x) - f(x_0) + \mathcal{W}(x_0) \\ &= f(x) - \mathcal{W}(x) \\ &\geq f(x) - F(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Aus (8.3), (8.4) und (8.5) folgt die Behauptung. □

BEMERKUNG 8.4:

Nach SATZ 8.3 wird das Problem der Konstruktion einer K-Funktion auf die Bestimmung von Quasisubgradienten der Empfindlichkeitsfunktion in 0 reduziert. Nach SATZ 7.1 ist das äquivalent zur Bestimmung von Lösungen des Dualproblems

$$h_G(u^*) \to \max, \quad u^* \in U.$$

Wir wollen nun eine einfache hinreichende Bedingung für die Quasikonvexität der Empfindlichkeitsfunktion angeben.

SATZ 8.5: Sei $F : X \times U \to \bar{R}$ mit $F(x,0) = f(x)$ quasikonvex.

Dann ist $h(u) = \inf_q F(x,u)$ quiasikonvex.

Beweis :

Seien $u_1, u_2 \in U$ und $\zeta \in R$ mit $h(u_1) < \zeta$, $h(u_2) < \zeta$.

Es genügt offenbar zu zeigen

$$h(tu_1 + (1-t)u_2) < \zeta \quad \forall t \in [0,1].$$

Nach der Definition von h existieren x_1 und x_2 mit

$$F(x_1, u_1) < \zeta \quad \text{und} \quad F(x_2, u_2) < \zeta$$

Wegen der Quasikonvexität von F gilt nun:

$$h(tu_1 + (1-t)u_2) \leq F(tx_1 + (1-t)x_2, tu_1 + (1-t)u_2) < \zeta$$

□

8 Anwendungen bei Vektoroptimierungsprobleme-men

Seien $X = R^n, Y = R^p$ und $\quad U = R^m$.

Y sei mit folgender Halbordnung versehen:

$$x \geq y \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \geq y_i, \quad i = 1, 2, ..., p.$$

Wir vereinbaren:

$$x > y \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq y, \quad \text{und} x \neq y.$$

Seien $\mathcal{F} :\rightarrow Y, \quad G \subseteq X$ und wir betrachten folgendes Vektorminimierungsproblem:

$$(\mathcal{P}) \qquad \mathcal{F}(x) \rightarrow \min, \quad x \in G,$$

Unter der Lösung von $(\mathcal{P})$ wollen wir verstehen die Bestimmung einer effizienten Lösung, d.h. eines $x_0 \in G$, für welches gilt:

$$\nexists x \in G \quad \text{mit} \quad (\mathcal{F})(x) < (\mathcal{F})(x_0).$$

Sei $b \in X$ mit $b_i > 0$ $i = 1, 2, ..., p$.

Wir betrachten

$$(\mathcal{P}') \qquad (b, \mathcal{F}(x)) \rightarrow \min, \quad x \in G,$$

Wegen $x > y \Longrightarrow (b, x) > (b, y)$ liefert jede Lösung von $(\mathcal{P}')$ eine effiziente Lösung von $(\mathcal{P})$. Ein skalares Optimierungsproblem mit dieser Eigenschaft heißt Ersatzproblem für das Vektooptimierungsproblem (P).

Sei $d : U \rightarrow \bar{R}$.

$$(\mathcal{D}') \qquad d(y) \rightarrow \max, \quad y \in U,$$

sei ein Dualproblem zu $(\mathcal{P}')$.

<u>SATZ 9.1:</u> Sei $y_0 \in U$. Jede Lösung der Ungleichung

$$(b, \mathcal{F}(x)) - d(y_0) \leq 0 \tag{9.1}$$

<u>Beweis :</u>

Sei x_0 eine Lösung von (9.1).

Da $\mathcal{D}'$ eind Dualproblem zu $\mathcal{P}'$ ist gilt

$$(b, \mathcal{F}(x)) \geq d(y_0) \quad \text{fralle} \quad x \in G.$$

Somit ist $(b, \mathcal{F}(x)) \geq (b, \mathcal{F}(x_0))$ für alle

$x \in G$, d.h. x_0 ist eine Lösung von $(\mathcal{P}')$. Da $(\mathcal{P}')$ ein Ersatzproblem für $(\mathcal{P})$ ist, stellt x_0 eine effiziente Lösung von $(\mathcal{P})$ dar. □

Wir wollen uns dem Spezialfall zuwenden, da $f(x) = (b, \mathcal{F}(x))$ eine quasikonvexe Funktion ist und der zulässige Bereich G die Form hat

$$G = \{x \in X | g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., s\},$$

wobei $g_j : X \to \bar{R}$ quasikonvexe Funktionen sind.

Sie $F : X \times R^{ns} \to \bar{R}$ gegeben durch:

$$F(x, u) = \begin{cases} f(x), & \text{falls} g_j(x + u_j) \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., s \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{9.2}$$

Sei $F(x, u) \leq F(y, v) < +\infty$, d.h. $f(x) \geq f(y) < +\infty$ und

$$g_j(x + u_j) \leq 0, \quad g_j(y + v_j) \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., s.$$

Nach Voraussetzung gilt für alle $t \in [0, 1]$:

$$f(x + t(y - x)) \leq f(y),$$
$$g(x + t(y - x) + u_j + t(v_j u_j)) \leq 0$$

Mithin

$$F(x + t(y - x), u + t(v - u)) \leq f(y) \leq F(y, v),$$

d.h. F ist quasikonvex. Sei

$$h(u) = \inf_x F(x, u). \tag{9.3}$$

Nach LEMMA 8.5 ist dann h quasikonvex.

Man rechnet leicht nach:

$$h_G(y) = q_h^G(0, y) = \inf\{f(x)|(u, y) \geq 0, g_j(x + u_j) \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., s\} \quad (9.4)$$

Wir betrachten folgendes Dualproblem zu $(\mathcal{P}')$:

$$(\mathcal{D}') \qquad h_G(y) \to \max, \quad y \in R^{ns}.$$

SATZ 9.1: F, h, h_G seien definiert gemäß (9.2), (9.3), (9.4). $f : X \to \bar{R}$, $g_j : X \to \bar{R}$ seien quasikonvex und es möge ein $\bar{x} \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{ri}\{x|g_j(x) \leq\}$ existieren.

Für $\alpha = \inf\{f(x)|g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, ..., s\}$ und $M > \alpha$ gelte weiter f sei oberhalbstetig für alle x mit $f(x) < M$.

Mit $\beta_G = \sup_y h_G(y)$ gilt dann:

$(\mathcal{D}')$ besitzt eiene Lösung, $\alpha = \beta_G$ und h_G ist oberhalbstetig für alle $y \neq 0$.

Beweis :

Es genügt zu zeigen, daß h die Voraussetzungen des SATZes 6.2 erfüllt, d.h. daß für alle $y \neq 0$ und $h(u)\alpha$ ein d derart existiert, daß $(d, y) > 0$ gilt und h oberhalbstetig in u bezüglich d ist.

Sei also $h(u) < \alpha$ und $(y, u) = 0$.

Für jedes λ mot $h(u) < \lambda < \alpha$ existiert ein x, so daß gilt

$$f(x) < \lambda \quad \text{und} \qquad g_j(x + u_j) \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., s.$$

Aus$\bar{x} \in \mathrm{int}\{x|g_j(x) \leq 0\}$ folgt

$$g_j(x + u_j + t(\bar{x} - x - u_j)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad j = 1, 2, ..., s. \qquad (9.5)$$

Folgende Fäle sind möglich:

1. $(\bar{x} - x - u_{j_0}, y_{j_0}) > 0$ für ein $j_0 \in \{1, 2, ..., s\}$.

Sei $d = (d_1, d_2, ..., d_s)^T$ gegeben durch:

$$d_{i_0} = \bar{x} - x - u_{j_0}, \quad d_i = 0 \quad \text{fr} \quad i \neq i_0.$$

Dann ist $(d, y) > 0$ und für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$g_j(x + u_j + td_j) \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., s.$$

Daraus folgt

$$h(u + td) \leq F(x, u + td) = f(x) < \lambda,$$

d.h. h ist oberhalbstetig in u bezüglich d.

2.$(\bar{x} - x - u_i, y_i) = 0$ für alle $j_0 \in \{1, 2, ..., s\}$.

Da $y \neq 0$ ist, existiert ein i_1, so daß $y_{i_1} \neq 0$ gilt. Da $\bigcup \mathrm{int}\{x | g_j(x) \leq 0\}$ eine Umgebung von $\bar{x}$ ist, existiert ein $\hat{x} \in \bigcup \mathrm{int}\{x | g_j(x) \leq 0\}$ mit $(\hat{x} - x - u_{i_1}, y_{i_1}) > 0$.

Wir wählen

$$d_{i_1} = \hat{x} - x - u_{i_1} \quad d_i = 0 \quad \text{fr} \quad i \neq i_1$$

und schließen wie im 1. Fall.

3.$(\bar{x} - x - u_i, y_i) \leq 0$ für $i = 1, 2, ..., s$ und $(\bar{x} - x - u_{j_0}, y_{j_0}) < 0$.

Dann gilt wegen $(u, y) = 0$

$$(\bar{x} - x, \sum_{i=1}^{s} y_i) < 0. \tag{9.6}$$

Da f oberhalbstetig in x ist, existiert ein $t_0 \in (0, 1)$, so daß gilt:

$$f(x + 2t(\bar{x} - x)) < \lambda, \qquad \forall t \in [0, t_0].$$

Wegen (9.5) gilt

$$g_i(x + 2t(\bar{x} - x) + u_i + t(x - \bar{x} - u_i)) \leq 0, \qquad i = 1, 2, ...s.$$

Mit $d_i \neq x - \bar{x} - u_i$ folgt dann wegen (9.6) und $(u, y) = 0$

$$(d, y) > 0$$

sowie für alle $t \in [0, t_0]$

$$h(u + td) \leq F(x + 2t(\bar{x} - x), u + td) = f(x + 2t(\bar{x} - x)) < \lambda,$$

d.h. h ist oberhalbstetig in u bezüglich d. □

Literatur

[1] BALDER S. J.: *An extension of duality-stability relations to nonconvex optimization problems*

SIAM J. Contr. and Opt. 15 (1977), 329-343

[2] BRECKNER, W.W.: *Dualität bei Optimierungsaufgaben in halbgeordneten topologischen Vektorräumen. Teil I.*

Revue Analyse numérique et Théorie Appr. 1 (1972) 5-35. und 2 (1973), 27-35

[3] CARATHEODORY, C.R.: *Die Methode der geodätischen Äquidistanten und das Problem von Lagrange*

Acta Math. 47 (1926), 199-236

[4] CROUZEIX, J.-P.: *Polaires quasi-convexes at dualite*

C.R. Acad.Sci.Paris, Ser. A 279(1974), 977-958

[5] CROUZEIX, J.-P.: *Contibituons a l'etude des fonctions quasiconvexes*

Dissertation, Universite de Clermont II, 1977

[6] CROUZEIX, J.-P.: *Conjugacy in quasiconvex analysis*

Convex analysis and its applications (ed. Auslender) Lecture Notes in Econ. and Math. Systems 144 (1977), 66-99

Z. ang. Math. und Mech. 60 (1980) 1-5.

[7] DOLECKI, S.; KURCYUSZ, St.:

On φ-convexity in extremal problems

Technical Report, Inst. of Automatic Control, Techn. Univ. of Warsaw, 1976

[8] ELSTER, K.-H.; NEHSE, R.: *Zur THeorie der Polarfunktionale*

Math. Operationsforsch. Statist. 5 (1974) 3-21.

[9] GREENBERG, H.J.; PIERSKALLA, W:P.: *Quasi-cnjugate functions and surrogate duality*

Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle 15 (1973), 437-448

[10] IOFFE, A.D.; TICHMIROV, V.M.: *Teorija ekstremalnych zadac*

Izd.vo Nauka, Moskva, 1974

[11] KOBLER, H–D.: *Zur Dualisierung in der nichlinearen Optimierung*

Diplomarbeit, Ilmenau, 1974

[12] KUTATELADZE S.S., RUBINOV, A.M.: *Dvojstvenost' Minkovskogo i ee prilozenija*

Nauka, Novosibirsk, 1976

[13] LINDBERG, O.: *A generalization of Fenchel conjgation giving generalized Lagrangians and symmetric nonconvex duality*

IX Int. Symposium on Math. Programming, Budapest, 1976

[14] MANGASARIAN, O.L.: *Nonlinear programming.*

McGraw-Hill, New-York 1969.

[15] MARTOS, B.: *Nonlinear Programming. Theory and Methods*

Akademiai Kiado, Budapest, 1975

[16] ROCKAFELLAR, R.T.: *Convex analysis.*

Princeton University Press., Princeton, N.J. 1970.

[17] RUDIN, W.: *Functional analysis.*

McGraw-Hill, New York 1973.

[18] SCHRADER, J.: *Eine Verallgemeinerung der Fenchelkonjugation und Untersuchungen ihrer Invarianten: Verallgemeinerte konvexe Funktionen, Dualitäts- und Sattelpunktsätze*

Dissertation, Friedrich-Wilhelm-Univ. Bonn, 1975

[19] SEIDLER, K.-H.: *Zur Dualisierung in der nichlinearen Optimierung*

Dissertation, Ilmenau, 1972

[20] VOGEL, W.: *Duale Optimierungsaufgaben und Sattelpunktsätze*

Unternehmensforschung 13 (1969), 1-28

[21] WEISS, F.A.: *Konjugierte Funktiionen*

Arch. Math. 20, (1969), 538-545

[22] ZEIDLER, E.: *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I. Fixpunktsätze*

B.G. Teubner, Leipzig, 1975